Оптимальный линейный прогноз

А.В. Павлов

***Аннотация*—Статья посвящена ускоренному алгоритму линейного прогноза (n+1)-ой случайной величины по первым n наблюдениям. С помощью рассмотрения нового скалярного произведения в пространстве линейной оболочки исходных n векторов, ускоряется процесс нахождения такой проекции. Случайные наблюдения могут быть нестационарными. Новое скалярное произведение позволяет получить выражение оптимальной линейной оценки n+1-го наблюдения по первым n наблюдениям в новой форме, которая повторяет разложение по ортогональному базису в случае, когда отсутствует ортогональность исходных векторов. Результат представляет интерес с точки зрения проекций векторов в пространстве трех измерений. Одна из теорем доказывается методами аналитической геометрии без применения понятия косинуса угла или требования ортогональности базиса в подпространстве исходных двух векторов. Во второй части статьи основные теоремы применяются к некоторым задачам прогноза и фильтрации: в случае фильтрации «полезного сигнала» в произвольном «шуме» приводится ускоренный алгоритм получения оптимальной линейной оценки «полезного» сигнала. В отличие от традиционных последовательных алгоритмов на каждом следующем шаге не надо находить вектор, ортогональный всем предыдущим наблюдениям. Аналогичная ситуация наблюдается при прогнозировании очередного случайного значения по предыдущим. В случае, когда проектирование ведется на смещенные наблюдения, найдена ошибка оптимальной линейной оценки. Точный вид ошибки легко вычисляется, если известна дисперсии очередного наблюдения.**

***Ключевые слова*—Быстрая линейная фильтрация, оптимальная линейная оценка, оптимальный прогноз, ошибка линейного прогноза, произвольный процесс наблюдений.**

I. Введение

Статья посвящена ускоренному алгоритму линейного прогноза (n+1)-ой случайной величины ξ_{n+1} по первым n наблюдениям $\xi_1,\ldots\xi_n$ [1,2,3,8]. Случайные величины могут быть произвольными (нецентрированными и нестационарными). При нахождении такого прогноза используют обыкновенную схему: проектируют $\xi_{n+1} = x_{n+1}$ на набор векторов (случайных величин)

$$x_1,\ldots x_n, x_i = \xi_i, i = 1,\ldots n,$$

с помощью скалярного произведения $(x_i, x_j) = M\xi_i\xi_j$, затем находят вектор, ортогональный линейной оболочке $x_1,\ldots x_n, c\delta_{n+1}, \|\delta_{n+1}\| = 1$, (δ_{n+1} - орт), длина которого совпадает со средне-квадратической ошибкой такого прогноза проектирования [2,3,5,7,8]. В данной статье в пространстве линейной оболочки векторов $x_1,\ldots x_n$ рассматривается новое скалярное произведение $(x_i, x_j)_2$ (теорема 1). Данное скалярное произведение ускоряет процесс нахождения оптимальной проекции (оценки) $\hat{x}_{n+1}$ (теорема 2).

Предложение 1 является вводным и только иллюстрирует геометрические аналогии с точки зрения обыкновенного трехмерного линейного пространства векторов. С точки зрения автора, теорема 1 интересна сама по себе для аналитической геометрии в трехмерном пространстве (некоторые аналогии с геометрией Лобачевского на плоскости). Ввиду этого, автор изложил первую часть в терминах трехмерного пространства, а не для общего многомерного случая. Общий случай рассмотрен в теореме 2.

Третья часть посвящена некоторым применениям теоремы 1 и аналогичной ей теоремы 2 для некоторых схем прогноза и фильтрации [3,6,7].

II. Основной результат

Мы будем использовать обозначения $\xi = \bar{x}$, называя случайную величину ξ также вектором $\bar{x}$ в тех случаях, когда алгебраические аналогии упрощают изложение.

Предложение 1 на примере достоверной оценки третьего вектора x_3 по первым двум дает возможность привести алгоритм достоверной (только для случая алгебраических векторов) линейной фильтрации для оценки $n+1$-ого вектора ξ_{n+1} по первым n векторам $\xi_1,\ldots\xi_n$ если известны скалярные произведения

$$(\xi_{n+1}, \xi_i) = M\xi_{n+1}\xi_i; i = 1,\ldots n,$$

и длина оцениваемого вектора-наблюдения $\|\xi_{n+1}\| = \sqrt{(\xi_{n+1}, \xi_{n+1})}$; дана также матрица скалярных произведений

$$(\xi_i, \xi_j), i, j = 1,\ldots n.$$

(Данные предположения являются исходными данными для многих схем линейных оценок) [1,2,3,8].

Статья получена 25 февраля 2020.
Andrey Valerianovich Pavlov is with Moscow Institute of Radio-technics,Electronics and Automatics-RTU, higher mathematics-1, Moscow, Russia (e-mail: avpavlovmgu@my-post.ru).

В предложении 1 известны два скалярных произведения $(\overline{x_3}, \overline{x_1})$ и $(\overline{x_3}, \overline{x_2})$, а вектора $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ считаются исходными данными.

По определению, величина

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = (e_1, x_3) e_1 + (e_2, x_3) e_2$$

совпадает с оптимальной линейной оценкой (проекцией) вектора x_3 по векторам x_1, x_2 (e_1, e_2 получены ортогонализацией x_1, x_3), $\hat{x}_3 = Pr_{x_1, x_2} x_3$.

Ввиду некоторой простоты предложения 1 формулировки данного предложения практически совпадают с доказательствами, в которых основную роль играют сопутствующие обозначения.

Предложение 1.

1.

Для $Pr_{x_i} x_3 = \hat{x}_3(i)$ (выполнено

$$(\hat{x}_3(i), \hat{x}_3(i)) = (e_i, x_3)^2 = (\hat{x}_3(i), x_3), e_i = x_i / \| x_3 \|,$$
$$i = 1, 2;$$

2.

Оценка вектора x_3 по векторам x_1, x_2 может быть определена двумя способами:

а) с точки зрения алгебры векторов данная оценка достоверна (безошибочна)

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

$$x_3 = \hat{x}_3 + \delta_3 (\| x_3 \|^2 - \| \hat{x}_3 \|^2)^{1/2},$$

Отметим, что с точки зрения случайных величин длина в квадрате $\| x_3 \|^2 = M \xi_3 \xi_3$ всегда считается известной (оценивается до построения оптимальной оценки, например, как мощность в момент $t = 3$ для стационарной последовательности $\xi_1, \xi_2 \ldots$); вектор $\delta_3 = e_3$ с точки зрения линейной алгебры очевиден: либо $[x_1, x_2]$, либо вектор $(0,0,1) = \delta_3$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3; для случая случайных величин оценка $\delta_3 = e_3$ составляет основную сложность, и она, чаще всего, невозможна в принципе.

б) с точки зрения случайных величин при известных входных параметрах $(\xi_i, \xi_j), i, j = 1, \ldots 3$ (даны все скалярные произведения, включая длину ξ_3) оптимальная оценка x_3 по x_1, x_2 (в отличие от фильтра Кальмана-Босси [1,8]) определяется из равенства

$$\hat{x}_3 = (e_1, x_3) e_1 + (e_2, x_3) e_2 + (E_3, x_3) E_3,$$

в котором роль третьего орта E_3 играет измеримая относительно случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 константа

$$const. = E_3 = 1,$$

причем в случае центрированных случайных величин (когда $M \xi_1 = M \xi_2 = 0$), имеет место равенство

$$(E_3, x_3) = M x_3,$$

и

$$\hat{x}_3 = (e_1, x_3) e_1 + (e_2, x_3) e_2 + M x_3 1, x_3 = \hat{x}_3 + \Delta^2, \Delta = \vec{\Delta},$$

причем

$$\| \Delta \|^2 = \| x_3 \|^2 - (e_1, x_3)^2 - (e_1, x_3)^2 - (E_3, x_3)^2 =$$
$$= \| x_3 \|^2 - (e_1, x_3)^2 - (e_1, x_3)^2 - M x_3^2;$$

данная ошибка $\| \Delta \|^2$ меньше ошибки фильтра Кальмана-Босси, и выполнено равенство

$$x_3 = (e_1, x_3) e_1 + (e_2, x_3) e_2 + M x_3 1 + (e_4, x_3) e_4,$$
$$\| e_i \| = 1, \forall i, (e_i, e_j) = 0, i \neq j,$$

в котором

$$D x_3 = \| x_3 \|^2 - (M x_3)^2 = (e_1, x_3)^2 + (e_2, x_3)^2 + (e_4, x_3)^2,$$

$$(e_4, x_3)^2 = \| \Delta \|^2 = D x_3 - (e_1, x_3)^2 + (e_2, x_3)^2, e_4 = \delta_4.$$

(в данном центрированном случае орт $1 = E_3$ ортогонален и e_1 и e_2).

Доказательство. Пункт 1 следует из определения косинуса угла через скалярные произведения:

$$\| Pr_{x_i} x_3 \|^2 = (Pr_{x_i} x_3, x_3), i = 1, 2.$$

Доказательство пункта 2 для случая чисто алгебраических векторов следует из приведенных формулировок данного пункта 1 и процесса ортогонализации.

Доказательство пункта б) для случая случайных векторов тоже следует из процесса ортогонализации $x_1, x_1, 1$, в котором третьим вектором мы считаем не x_3, а константу $E_3 = 1$, четвертый вектор e_3 в данном процессе ортогонализации определяет ошибку.

Основной результат статьи сформулирован в теореме 1, из которой следует "быстрый фильтр" значений следующих испытаний по предыдущим.

Теорема 1

$$x_3 = c_1 x_1 + x_2 c_2 + \| \Delta \|^2 \delta_3, \| \delta_3 \| = 1,$$
$$(\delta_3, x_1) = (\delta_3, x_2) = 0, \Delta = \| \Delta \| \delta_3,$$

причем константы оптимальной оценки $\hat{x}_3 = c_1 x_1 + x_2 c_2$ могут быть найдены с помощью равенств

$$c_1 = (x_1, x_3) / \| x_1 \|^2, c_2 = (x_2, x_3) / \| x_2 \|^2 .$$

Доказательство. Доказательство вытекает из совпадения числового выражения проекций через те же вектора в случае двух разных скалярных произведений, определенных на одних и тех же векторах плоскости проекции. Точнее, рассмотрим два скалярных произведения : $((\cdot),(\cdot))_1$ и $((\cdot),(\cdot))_2$, первое из них совпадает с исходным скалярным произведением $((\cdot),(\cdot))_1 = ((\cdot),(\cdot))$, а второе определяется с помощью его значений как $(X_1, X_2)_2 = C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3$, если

$$X_1 = C_1E_1 + C_2E_2 + C_3\delta_3, \| \delta_3 \| = 1,$$
$$X_2 = R_1E_1 + R_2E_2 + R_3\delta_3, E_1 = x_1 / \| x_1 \|,$$
$$E_2 = \delta_3 x_2 / \| x_2 \|, \delta_3 \perp x_2, \delta_3 \perp x_1,$$

(второе скалярное произведение определяется как сумма произведений координат векторов X_1, X_2 в базисе E_1, E_2, δ_3; вектора x_1, x_2 не обязаны быть ортогональны, вообще говоря, аксиома $(x+y,z)_2 = (x,z)_2 + (y,z)_2$ следует из координатной формы записи второго скалярного произведения в базисе E_1, E_2, δ_3, (длины $\| x_1 \|, \| x_2 \|$ при таком определении для двух метрик совпадают). Отметим факт: вектор X_3 ортогонален плоскости векторов x_1, x_2 тогда и только тогда, когда он ортогонален данной плоскости только одновременно для обеих скалярных произведений. Следовательно,

$$\xi_3 = x_3 = C_3\delta_3 + c_1x_1 + x_2c_2 =$$
$$= C_3\delta_3 + x_1(x_1/, x_3)_1 / \| x_1 \|^2 + \overline{Y},$$

$$\xi_3 = x_3 = C_3\delta_3 + c_1x_1 + x_2c_2 =$$
$$= C_3\delta_3 + x_1(x_1/, x_3)_2 / \| x_1 \|^2 + \overline{Y},$$

причем

$$c_1x_1 = x_1(x_1/, x_3)_1 / \| x_1 \|^2 = e_1(e_1/, x_3)_1,$$
$$c_1 = (x_1/, x_3)_1 / \| x_1 \|^2,$$

$$c_1x_1 = x_1(x_1, x_3)_2 / \| x_1 \|^2 = e_1(e_1, x_3)_2,$$
$$c_1 = (x_1, x_3)_2 / \| x_1 \|^2,$$

в случае, когда процесс ортогонализации в плоскости L векторов x_1, x_2 для основного скалярного произведения начинался с первого вектора x_1 (единичный вектор δ_3 по определению уже ортогонален данной плоскости). При доказательстве (см. также систему уравнений далее) мы использовали следующую запись:

$$\xi_3 = x_3 = C_3\delta_3 + C_0c_1x_1 / \| c_1x_1 \|_1 + x_2c_2 =$$
$$= C_3\delta_3 + C_0e_1 + x_2c_2,$$

$$\xi_3 = x_3 = C_3\delta_3 + C_0c_1x_1 / \| c_1x_1 \|_2 + x_2c_2 =$$
$$= C_3\delta_3 + C_0e_1 + x_2c_2,$$

поскольку длина одного и того же вектора c_1x_1 (число c_1 определялось в исходной метрике) одна и та же для обеих скалярных произведений; число C_0 это - длина для обеих метрик, которая равна $(x_3, e_2)_1$ для первого обыкновенного скалярного произведения, и равна $(x_3, e_2)_2$ для второго скалярного произведения, если рассматривать ее как вторую координату, определяющую второе скалярное произведение. Из данных равенств следует совпадение чисел $(x_1, x_3)_1 = (x_1, x_3)_2$.

Во втором равенстве мы не использовали понятия косинус угла. В данных равенствах мы пользовались сохранением длины вектора x_1 для обеих скалярных произведений: $\| x_1 \|^2 = (x_1/, x_1)_1 = (x_1/, x_1)_2$ (данный факт следует из координатной формы записи обеих скалярных произведений в ортонормированных базисах e_1, e_2, δ_3, E_1, E_2, δ_3, $e_1 = E_1$). Аналогично доказывается равенство $(x_2, x_3)_1 = (x_2, x_3)_2$.

Следовательно, для нахождения оптимальной проекции можно использовать обыкновенную систему уравнений $(x_3 - c_1x_1 - c_2x_2, x_i)_2 = 0, i = 1, 2,$ с теми же числовыми значениями столбца свободных членов как в обыкновенном первом скалярном произведении, но при условии, что $(x_1, x_2)_2 = 0$.

Решение данной системы и есть содержание теоремы 1.

Следствие 1. Аналогичный факт для случая произвольной оценки x_{n+1} по первым n векторам--наблюдениям является следствием теоремы 1 и приведен в теореме 2 третьей части данной статьи.

Дословным повторением доказательства теоремы 1 является доказательство теоремы 2.

III. БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ-ПРОГНОЗА

Дословным повторением доказательства теоремы 1 является доказательство теоремы 2.

Теорема 2.

$$x_{n+1} = c_1x_1 + x_2c_2 + \ldots + c_nx_n + \| \Delta_{n+1} \|^2 \delta_{n+1}, \| \delta_{n+1} \| = 1,$$

где константы оптимальной оценки

$$\hat{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i, \delta_{n+1} \perp x_i, i = 1, \ldots, n,$$

находятся из равенства $c_i = (x_i, x_{n+1}) / \| x_i \|^2, i = 1, \ldots, n.$

Алгоритм прогноза случайной величины ξ_{n+1} по набору случайных величин $\xi_i, i=1,\dots,n,$ является другой формулировкой теоремы 2 в терминах случайных величин [2,3,4].

Алгоритм прогноза.

Мы предполагаем, что известны математические ожидания $M\xi_i\xi_{n+1}, i=1,\dots,n$ и матрица корреляций наблюдений $M\xi_i\xi_j,\ i,j=1,\dots,n$.

Оптимальная в средне-квадратическом смысле линейная оценка (прогноз) ξ_{n+1} по вектору наблюдений $\xi_1,\dots,\xi_n$ имеет вид

$$\hat{\xi}_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i, c_i=M\xi_i\xi_{n+1}/M\xi_i^2, i=1,\dots,n.$$

Быстрый алгоритм фильтрации.

Приводится алгоритм фильтрации полезного сигнала $\xi(t), t\in 0,1,\dots,$ по значениям наблюдений "зашумленного сигнала" $\eta(t)$:

$$\eta(t)=\xi(t)+\varepsilon(t), t\in 0,1,\dots,$$

здесь $\varepsilon(t), t\in 0,1,\dots,$ - "шум".

В данной схеме существует много разных постановок задачи в зависимости от вида слагаемых. Мы приведем только одну оценку (один алгоритм фильтрации), вытекающий из теоремы 2: оптимальная линейная оценка "полезного сигнала" $\xi(n+1)$ в момент времени $t=n+1$, полученная как проекция на наблюдения "зашумленного сигнала" $\eta(i), t=i=1,\dots,n+1$, (который мы наблюдаем), совпадает с

$$\hat{\xi}(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1}c_i\eta(i), c_i=M\eta(i)\xi(n+1)/M\eta^2(i)=$$

$$=M\eta(i)[\eta(n+1)-\varepsilon(n+1)]/M\eta(i)^2,$$
$$i=1,\dots,n.$$

При оценивании $\xi(n+1)$ мы предполагаем, что даны математические ожидания $M\eta(i)\eta(n+1), i=1,\dots,n+1,$ и $M\varepsilon(n+1)\eta(i), i=1,\dots,n+1; n=1,2,\dots.$

В случае некоррелированного центрированного "шума" и "полезного сигнала (данное предположение необходимо для оптимальности известного фильтра Кальмана-Босси) достаточно пользоваться только значениями $M\eta(i)\eta(n+1)$

$$M\varepsilon(n+1)\eta(i)=M\varepsilon(n+1)\varepsilon(i), i=1,\dots,n+1,$$
$$n=1,2,\dots$$

В данной оценке не нужно находить на каждом шаге новый орт. Данный факт убыстряет вычислительную процедуру (каждый новый орт не надо оценивать по предыдущим наблюдениям, как это следует из теоремы 2). В случае некоррелированного центрированного "шума" и "полезного сигнала"

$$M\varepsilon(i)\varepsilon(j)=M\eta(i)\varepsilon(j)=M[\varepsilon(i)+\xi(i)]\varepsilon(j)=0,$$
$$i\neq j,$$

$$M[\varepsilon(i)+\xi(i)]\varepsilon(i)=M\varepsilon(i)^2,$$

и вычислительная задача на каждом шаге существенно упрощается [2,3,4].

IV. Заключение

С точки зрения автора представляет интерес исследование результатов данной статьи в случае тождеств аналогичных тождествам Вольда [3,5,7] для нецентрированных случайных величин, когда, например, $\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\delta_{n-k}+T, T=M\xi_1=const.$

(Тождества такого типа естественны, ввиду принадлежности пределов

$$(x_1+\dots+x_n)/n\to T=const.$$

замкнутой линейной оболочке векторов $\xi_n,\xi_{n-1}\dots$). Из данных соотношений можно вывести линейную зависимость векторов

$$X_1=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\delta_{n-k}, X_2=\sum_{k=2}^{\infty}c_k\delta_{n-k}, \delta_n, T,$$

которая в принципиальном плане дает возможность заменить орт δ_n на константу и существенно уточнить процедуру прогноза последовательности, например, стационарных случайных величин.

Библиография

[1] М. Арато "Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами (Статистический подход)," Москва.: Наука., 1989.

[2] Венцель А.Д. " Курс теории случайных процессов," Москва.: Наука, 1975.

[3] Pavlov A.V. "Stochastic series of Fourier and its application to the theory of the filtering-prediction plastics (Book style with paper title and editor),"Moscow: Edd. of Moscow State Univers. nam. M. V. Lomonosov, facul. Mechanical-mathemat. , 2000.

[4] Павлов А.В. "Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат," Успехи мат.наук. т. 51, 1, сс. 547–588, 1996.

[5] Pavlov A.V. "Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation," Moscow: Sc.Bulletin of MIREA. 2012, vol.12, no.1,pp.38-48, 2012.

[6] Pavlov A.V. ". Reliable filtration in the "white noise", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.3, no. 10, pp.1-5 ,2015. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217

[7] Pavlov A.V. "The Wold's equalies and linear estimations for not-stationary processes," International Journal of Open Information Technologies Open Journal Systems, vol 3, no 7, pp.12-18, 2015 . Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217

[8] М.Х.Ф.Дэвис. "Линейное оценивание и стохастическое управление". Москва: Наука, 1984.

Andrey Valerianovich Pavlov (year of birth 1958**)**. Moscow University nam.M.V. Lomonosov, facul. mech.-math, 1975-1983. Moscow Institute of Radio-technics,Electronics and Automatics-RTU, higher mathematics (1983-2020), (about 3 books and 37 works in Web of Science). Professor Pavlov is the member of Moscow Mathematical society.

Optimal linear prognosis

Andrey Pavlov

Abstract— **In the article, we consider the speed-up algorithm of linear prognosis of the (n+1)-th random value by the first n known values. The values are uncentred and unstationary. The result we obtain with the help of a new scalar production in the linear subspace of n vectors (by analogy with the geometry of Lobachevsky). With the help of the production, we obtain a new form of linear projection of the additional vector to the subspace. The rapid algorithm of a finding of optimal linear estimation of an additional vector on the known vectors ensues from the projection. The new linear prognosis we obtain from the scheme of the algorithm. We can write the projection in the new rapid form. The proof of such a presentation is the main part of the article. The result is of interest from the point of three-dimensional linear space for the analytical geometry. We consider the main part of this article in terms of the three-dimensional space too. A result is of interest from the point of projections of vectors in space of three measures. One of the theorems is proved by the methods of analytical geometry without application of the notion of the cosine of a corner and construction of additional vectors in a subspace of the initial two vectors. In the second part of the article, the basic theorems are used to some tasks of prognosis and filtration: for filtration of «useful signal» in the random «noise». We obtain the speed-up algorithm of the filtering of a «useful» signal. Unlike the traditional algorithms, we do not search for new additional vectors.**

Keywords— **Optimum linear estimation, optimum prognosis, rapid linear filtration, error of linear prognosis, geometry of Lobachevsky.**

REFERENCES

[1] M. Arato "Linejnye stohasticheskie sistemy s postojannymi kojefficientami (Statisticheskij podhod)," Moskva.: Nauka., 1989.
[2] Vencel' A.D. " Kurs teorii sluchajnyh processov," Moskva.: Nauka, 1975.
[3] Pavlov A.V. "Stochastic series of Fourier and its application to the theory of the filtering-prediction plastics (Book style with paper title and editor),"Moscow: Edd. of Moscow State Univers. nam. M. V. Lomonosov, facul. Mechanical-mathemat. , 2000.
[4] Pavlov A.V. "Teorema tipa bol'shih uklonenij dlja kriterija hi-kvadrat," Uspehi mat.nauk. t. 51, 1, ss. 547–588, 1996.
[5] Pavlov A.V. "Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation," Moscow: Sc.Bulletin of MIREA. 2012, vol.12, no.1,pp.38-48, 2012.
[6] Pavlov A.V. ". Reliable filtration in the "white noise", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.3, no. 10, pp.1-5 ,2015.
Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217
[7] Pavlov A.V. "The Wold's equalies and linear estimations for not-stationary processes," International Journal of Open Information Technologies Open Journal Systems, vol 3, no 7, pp.12-18, 2015 . Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217
[8] M.H.F.Djevis. "Linejnoe ocenivanie i stohasticheskoe upravlenie". Moskva: Nauka, 1984.