Исследование уравнения Риккати для одномерной системы Годунова-Султангазина

С. А. Духновский

***Аннотация*—Исследование кинетических нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на больших временах относится к активно развивающемуся в последнее время направлению математической физики.**

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа движущихся частиц, взаимодействующих между собой. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсом и энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения или путем иных сил. Для описания приведенных выше предположений предложен ряд моделей – так называемые дискретные кинетические системы уравнений Карлемана, Годунова-Султангазина, Бродуэлла, где неизвестными функциями являются плотности частиц, зависящие от координат пространства-времени.

В данной статье исследуется уравнение Риккати для нулевой моды, получаемое из системы кинетических уравнений Годунова-Султангазина с периодическими начальными данными. Система описывает три группы частиц, движущихся с тремя скоростями. Первая группа движется с единичной скоростью в положительном направлении, а третья в противоположном. Частицы второй группы движутся с нулевой скоростью. Решение системы ищется вблизи состояния равновесия с малыми периодическими возмущениями. Данные возмущения раскладывают в ряд Фурье. Решение уравнения Риккати ищут методом последовательных приближений (метод простой итерации). Доказываются теоремы глобального существования и единственности решения уравнения Риккати.

***Ключевые слова*—система Годунова-Султангазина, возмущение, уравнение Риккати, пространство Соболева.**

I. Введение

Настоящая статья является продолжением цикла работ [5-6, 8-13], посвященных исследованию кинетической теории газов, а именно, дискретных кинетических уравнений Больцмана: гиперболических систем Карлемана и Годунова-Султангазина. Данные системы имеют концептуальные приложения в различных областях науки и техники: химии автокатализа, газовой динамики, кинетической теории газов. Будет рассмотрена задача Коши с периодическими начальными данными для системы Годунова-Султангазина. Задача на всей прямой для системы Карлемана исследована в статье [5]. В работах [6, 9] доказано стабилизация решения задачи Коши для системы Карлемана и Годунова-Султангазина с периодическими начальными данными к состоянию равновесия.

II. Постановка задачи

Рассматривается одномерная модель системы уравнений Годунова-Султангазина [2, 4, 6-8, 12].

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw),\, t > 0,\, x \in \text{Ў}, \\ &\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw), \\ &\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), 0 < \varepsilon < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

с периодическими начальными условиями

$$\begin{aligned} &u|_{t=0} = u^0(x), v|_{t=0} = v^0(x), w|_{t=0} = w^0(x), \\ &u^0(x) = u^0(x+2\pi), v^0(x) = v^0(x+2\pi), w^0(x) = w^0(x+2\pi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $u = u(x,t), v = v(x,t), w = w(x,t)$ - плотности трех групп частиц, ε - параметр Кнудсена.

Ищем решение задачи Коши (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} &u = u_e + \varepsilon^2 (u_e)^{1/2} \hat{u}, v = v_e + \varepsilon^2 (v_e)^{1/2} \hat{v}, \\ &w = w_e + \varepsilon^2 (w_e)^{1/2} \hat{w}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $v_e^2 = u_e w_e > 0$ - состояние равновесия,

$$\hat{u} = \sum_{k \in Z} u_k(t) e^{ikx}, \hat{v} = \sum_{k \in Z} v_k(t) e^{ikx}, \hat{w} = \sum_{k \in Z} w_k(t) e^{ikx}.$$

Будем решать нашу задачу в весовом пространстве Соболева $W_{2,\gamma}^1 \left(R_+; H_\sigma\right)$ с соответствующей нормой:

$$\|\hat{u}\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+;H_\sigma)} = \left\| \frac{\partial}{\partial t} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma)} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma)},$$

где

$$\|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma)}^2 = \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 \, dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 \, dt < \infty, \gamma = \varepsilon \mu_0, 0 < \mu_0 < 1,$$

$$\|\hat{u}\|_{H_\sigma}^2 = |u_0|^2 + \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k|^2 .$$

Статья получена 24 мая 2019 г.

Сергей Анатольевич Духновский, преподаватель Московского государственного строительного университета (email: sergeidukhnvskijj@rambler.ru).

III. Уравнение Риккати

Далее будет исследоваться уравнение Риккати. Оно получается из системы Годунова-Султангазина. Из доказательства глобальной разрешимости уравнения Риккати будет следовать стабилизация нулевой моды к нулю. Уравнение Риккати [6] имеет вид

$$\frac{d}{dt} z_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e z_0^{(m)} = -\varepsilon v_e^{1/2} \frac{3}{2} z_0^{(m)} z_0^{(m)} + R_\varepsilon^{(m)}(t), \qquad (4)$$
$$z_0^{(m)}\Big|_{t=0} = 0,$$

где $L_e = 4v_e + u_e + w_e > 0, m \in \text{Ѓ}, R_\varepsilon^{(m)} \in L_{2,\gamma}\left(\text{Ў}_+\right).$

Покажем, что однородное уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt} z_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e z_0^{(m)} = -\varepsilon v_e^{1/2} \frac{3}{2} z_0^{(m)} z_0^{(m)},$$
$$z_0^{(m)}\Big|_{t=0} = 0$$

имеет тривиальное решение.

Предположим, что существует $z_0^{(m)} \neq 0$. Положим

$$y = 1\big/ z_0^{(m)}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} y = -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} - \frac{1}{\varepsilon} L_e y,$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e t} y \right) = -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e t}.$$

Интегрируя на отрезке $[\tau; t] \subset [0; T_*]$, принадлежащим отрезку существования решения задачи Коши (в силу классических результатов), получим

$$e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e t} y(t) - e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e \tau} y(\tau) = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{v_e^{1/2}}{L_e} \left(e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e t} - e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e \tau} \right).$$

Отсюда

$$z_0^{(m)}(\tau) - e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (\tau - t)} z_0^{(m)}(t) = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{v_e^{1/2}}{L_e} z_0^{(m)}(t) \times$$
$$\times z_0^{(m)}(\tau) \left(1 - e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (\tau - t)} \right).$$

При фиксированном t, устремляя $\tau \to 0$, получим

$$z_0^{(m)}(t) = 0.$$

Таким образом, однородное уравнение Риккати имеет тривиальное решение.

Далее получим оценку функции $z_0^{(m)}$ в весовом пространстве $L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_+\right)$ с нормой

$$\left\| z_0^{(m)} \right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)} = \sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{2\gamma t} \left| z_0^{(m)}(t) \right|.$$

Теорема. Пусть выполнено условие

$$\varepsilon^2 \frac{3}{2} \sqrt{c_2 c_3} \frac{1}{1-q} \sqrt{\varepsilon} \left(c_{1,\sigma} \left\| z^{(m)} \right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+; H_\sigma^{(m)})} + \right.$$
$$+ c_{4,\sigma} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\left\| \hat{u}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{v}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{w}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} \right) \times$$
$$\times \left\| z^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+; H_\sigma^{(m)})} +$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} c_{6,\sigma} \left(\left\| \hat{u}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{v}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{w}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} \right)^2 \right) \le q < 1,$$
$$\sigma > 2.$$

Тогда для любого $n \ge 1$ справедлива оценка

$$\left\| z_0^{(n)} \right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)} \le \frac{1}{1-q} \sqrt{\varepsilon c_3} \left(c_{1,\sigma} \left\| z^{(m)} \right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+; H_\sigma^{(m)})} + \right.$$
$$+ c_{4,\sigma} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\left\| \hat{u}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{v}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{w}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} \right) \times \qquad (5)$$
$$\times \left\| z^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+; H_\sigma^{(m)})} +$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} c_{6,\sigma} \left(\left\| \hat{u}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{v}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} + \left\| \hat{w}^0 \right\|_{H_\sigma^{(m)}} \right)^2 \right).$$

Доказательство. Применяем метод последовательных приближений к уравнению Риккати (4)

$$\frac{d}{dt} z_0^{(n)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e z_0^{(n)} = -\varepsilon v_e^{1/2} \frac{3}{2} z_0^{(n-1)} z_0^{(n-1)} + R_\varepsilon^{(m)}(t),$$
$$z_0^{(n)}\Big|_{t=0} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$z_0^{(n)} =$$
$$= \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (s-t)} \left(-\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} z_0^{(n-1)}(s) z_0^{(n-1)}(s) + R_\varepsilon^{(m)}(s) \right) ds.$$

Добавим экспоненты в подынтегральное выражение, а также помножим на $e^{2\gamma t}$ и возьмем супремум

$$\sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{2\gamma t} \left| z_0^{(n)} \right|^2 = \sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{2\gamma t} \left| \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (s-t)} \left(-\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} e^{-2\gamma s} e^{\gamma s} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times z_0^{(n-1)} e^{\gamma s} z_0^{(n-1)} + R_\varepsilon^{(m)}(s) \right) ds \right|^2 \le$$
$$\le 2 \sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{2\gamma t} \left| \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (s-t)} \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} e^{-2\gamma s} e^{\gamma s} z_0^{(n-1)} e^{\gamma s} z_0^{(n-1)} ds \right|^2 + \qquad (6)$$
$$+ 2 \sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{2\gamma t} \left| \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} L_e (s-t)} R_\varepsilon^{(m)}(s) ds \right|^2 = I_1 + I_2.$$

Для первого выражения выносим супремум по s из интеграла для функции $z_0^{(n-1)}$

$$I_1 \le \frac{9}{4} v_e \varepsilon^2 2 \sup_{t \in \text{Ў}_+} e^{(2\gamma - \frac{2}{\varepsilon} L_e) t} \left\| z_0^{(n-1)} \right\|^4_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)} \left| \int_0^t e^{(\frac{1}{\varepsilon} L_e - 2\gamma) s} ds \right|^2.$$

Вычисляем интеграл

$$\left|\int_0^t e^{(\frac{1}{\varepsilon}L_e-2\gamma)s}ds\right|^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}L_e-2\gamma\right)^2}\left|e^{(\frac{1}{\varepsilon}L_e-2\gamma)t}-1\right|^2\le$$

$$\le\varepsilon^2c_0\left|e^{(\frac{1}{\varepsilon}L_e-2\gamma)t}-1\right|^2.$$

Тогда

$$I_1\le\frac{9}{4}v_e\varepsilon^4c_1\sup_{t\in\text{Ў}_+}e^{(2\gamma-\frac{2}{\varepsilon}L_e)t}\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^4_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\left|e^{(\frac{1}{\varepsilon}L_e-2\gamma)t}-1\right|^2=$$

$$=\frac{9}{4}v_e\varepsilon^4c_1\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^4_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\sup_{t\in\text{Ў}_+}\left|e^{-\gamma t}-e^{(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t}\right|^2\le$$

$$\le\frac{9}{2}v_e\varepsilon^4c_1\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^4_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\sup_{t\in\text{Ў}_+}\left(e^{-2\gamma t}+e^{2(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t}\right)\le$$

$$\le\frac{9}{4}\varepsilon^4c_2\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^4_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)},\ c_2=2c_1v_e\sup_{t\in\text{Ў}_+}\left(e^{-2\gamma t}+e^{2(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t}\right).$$

Переходим к оценке для I_2. Применяем неравенство Гельдера

$$I_2=\sup_{t\in\text{Ў}_+}e^{2\gamma t}\left|\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}R_\varepsilon^{(m)}(s)ds\right|^2\le$$

$$\le\sup_{t\in\text{Ў}_+}e^{2(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t}\int_0^t e^{2(\frac{1}{\varepsilon}L_e-\gamma)s}ds\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le$$

$$\le\varepsilon c_3\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Пусть выполнено условие

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(4v_e+u_e+v_e\right)-\gamma>0.$$

Применяя оценки I_1, I_2 к (5), получаем

$$\left\|z_0^{(n)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le\frac{9}{4}\varepsilon^4c_2\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}+\varepsilon c_3\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

В качестве нулевого приближения возьмем

$$z_0^{(0)}=0.$$

Теперь положим

$$X^{(n)}=\max_{n=1,\dots,j}\left\|z_0^{(n)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Тогда

$$\left(X^{(n)}\right)^2\left(1-\varepsilon^4c_2\frac{9}{4}\left(X^{(n)}\right)^2\right)\le\varepsilon c_3\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Если

$$\varepsilon^4c_2\frac{9}{4}\left(X^{(n)}\right)^2\le q^2<1,$$

то

$$\left(X^{(n)}\right)^2\le\frac{1}{1-q^2}\varepsilon c_3\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}. \qquad (7)$$

Доказывается (см. определение функции $R_\varepsilon^{(m)}(t)$ в [6]), что

$$\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)}\right)}+ \qquad (8)$$

$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}\left(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)}\right)}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2.$$

Применим оценку (8) к (7). В этом случае получаем, что

$$\left(X^{(n)}\right)^2\le\frac{1}{1-q^2}\varepsilon c_3\left(c_{1,\sigma}^2\left\|z^{(m)}\right\|^4_{L_{2,\gamma}\left(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)}\right)}+\right.$$

$$+c_{4,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)}\right)}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^3}c_{6,\sigma}^2\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^4\right).$$

Отсюда, выше неравенство верно, если

$$\varepsilon^4\frac{9}{4}c_2\frac{1}{1-q^2}\varepsilon c_3\left(c_{1,\sigma}^2\left\|z^{(m)}\right\|^4_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+\right.$$

$$+c_{4,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^3}c_{6,\sigma}^2\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^4\right)\le q^2.$$

Теорема. Последовательность $z_0^{(n)}$ является фундаментальной, если

$$\varepsilon^2\frac{3}{2}\sqrt{c_2c_3}\frac{2}{1-q}\sqrt{\varepsilon}\left(c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+\right.$$

$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right)\le q_1,\ q_1\in(0,1).$$

Доказательство. Рассмотрим итерационную последовательность

$$\frac{d}{dt}z_0^{(n)}+\frac{1}{\varepsilon}L_ez_0^{(n)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}+R_\varepsilon^{(m)}(t),$$

$$z_0^{(0)}=0,$$

$$z_0^{(n)}\Big|_{t=0}=0.$$

(9)

Наряду с (9), определим последовательность с другим индексом

$$\frac{d}{dt}z_0^{(s)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e z_0^{(s)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(s-1)}z_0^{(s-1)}+R_\varepsilon^{(m)}(t),$$
$$z_0^{(0)}=0,$$
$$z_0^{(s)}\Big|_{t=0}=0.$$

Рассмотрим их разность

$$\frac{d}{dt}\left(z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right)+\frac{1}{\varepsilon}L_e\left(z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right)=$$
$$=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\left(z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}-z_0^{(s-1)}z_0^{(s-1)}\right),$$
$$\left(z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right)\Big|_{t=0}=0.$$

Отсюда, в силу (5) имеем для $1\le s<n$

$$\left\|z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le\left\|z_0^{(n-1)}-z_0^{(s-1)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\times$$
$$\times\frac{3}{2}\varepsilon^2\sqrt{c_2}\frac{2}{1-q}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{c_3}\left(c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+\right.$$
$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+$$
$$\left.+c_{6,\sigma}\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right).$$

Если

$$\varepsilon^2\frac{3}{2}\sqrt{c_2c_3}\frac{2}{1-q}\sqrt{\varepsilon}\left(c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+\right.$$
$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+$$
$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right)\le q_1<1,\sigma>2,$$

то

$$\left\|z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le q_1\left\|z_0^{(n-1)}-z_0^{(s-1)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le$$
$$\le q_1^s\left\|z_0^{(n-s)}-z_0^{(0)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Применяем оценку (7)

$$\left\|z_0^{(n)}-z_0^{(s)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le q_1^s\frac{1}{1-q}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{c_3}\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Устремляя $s\to\infty$, получаем, что последовательность итераций $z_0^{(n)}$ является фундаментальной.

Теорема. Пусть $\sigma>2.$ Тогда существует единственное решение $z_0^{(m)}\in L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_+\right)$ нелинейного уравнения (4), для которого справедлива оценка

$$\left\|z_0^{(m)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le\frac{1}{1-q}\sqrt{\varepsilon c_3}\left(c_{1,\sigma}\left(\left\|z^{(m)}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+\right.\right.$$
$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\times$$
$$\times\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_+;H_\sigma^{(m)})}+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right)\right).$$

Доказательство. Необходимо показать, что

$$z_0^{(m)}=\lim_{n\to\infty}z_0^{(n)}$$

в $L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_+\right)$ есть решение уравнения Риккати (4). Существование предела следует в силу фундаментальности последовательности итераций $z_0^{(n)}$.

Рассматриваем наше уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt}z_0^{(n)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e z_0^{(n)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}+R_\varepsilon^{(m)}(t),$$
$$z_0^{(n)}\Big|_{t=0}=0.$$

Перейдем к пределу при $n\to\infty$, тогда

$$\frac{d}{dt}z_0^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e z_0^{(m)}=\lim_{n\to\infty}\left(-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}\right)+R_\varepsilon^{(m)}(t).$$

Покажем, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}\right)=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(m)}z_0^{(m)}.$$

Для этого рассмотрим следующий оператор

$$R\left(z_0^{(m)},z_0^{(n-1)}\right)=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(m)}z_0^{(m)}+\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}$$

в $L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_+\right)$. Заметим, что

$$\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(n-1)}z_0^{(n-1)}-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(m)}z_0^{(m)}=$$
$$=\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\left(z_0^{(n-1)}-z_0^{(m)}\right)z_0^{(n-1)}+\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\left(z_0^{(n-1)}-z_0^{(m)}\right)z_0^{(m)}.$$

Покажем, что $\left\|R\left(z_0^{(m)},z_0^{(n-1)}\right)\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\to 0,$ имеем

$$\left\|R\left(z_0^{(m)},z_0^{(n-1)}\right)\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\le$$
$$\le c_4^2\left\|z_0^{(n-1)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\left\|z_0^{(n-1)}-z_0^{(m)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}+c_4^2\left\|z_0^{(m)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\times$$
$$\times\left\|z_0^{(n-1)}-z_0^{(m)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}.$$

Здесь

$$\left\|z_0^{(n-1)}-z_0^{(m)}\right\|^2_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_+)}\to 0$$

в силу фундаментальности последовательности итераций. Получаем, что

$$R\left(z_0^{(m)},z_0^{(n-1)}\right)\to 0$$

в $L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_{+}\right)$. Таким образом, в $L_{\infty,\gamma}\left(\text{Ў}_{+}\right)$ имеем

$$\frac{d}{dt}z_0^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e z_0^{(m)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}z_0^{(m)}z_0^{(m)}+R_\varepsilon^{(m)}(t),$$

$$z_0^{(m)}\Big|_{t=0}=0.$$

IV. Единственность

Пусть есть другое решение z_0^* нелинейного уравнения Риккати. Вычитаем одно уравнение из другого, имеем

$$\left\|z_0^{(m)}-z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}\le$$

$$\le\left\|z_0^{(m)}-z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}^2\frac{3}{2}\varepsilon^2\sqrt{c_2}\left(\left\|z_0^{(m)}\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}+\left\|z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}\right).$$

Если

$$\left\|z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}\le\frac{1}{1-q}\sqrt{\varepsilon c_3}\left(c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_{+};H_\sigma^{(m)})}^2+\right.$$

$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_{+};H_\sigma^{(m)})}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right)$$

и

$$\varepsilon^2\frac{3}{2}\sqrt{c_2c_3}\frac{2}{1-q}\sqrt{\varepsilon}\left(c_{1,\sigma}\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_{+};H_\sigma^{(m)})}^2+\right.$$

$$+c_{4,\sigma}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)\left\|z^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\text{Ў}_{+};H_\sigma^{(m)})}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{6,\sigma}\left(\left\|\hat{u}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{v}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}+\left\|\hat{w}^0\right\|_{H_\sigma^{(m)}}\right)^2\right)\le q_2,\, q_2\in(0,1).$$

Тогда

$$\left\|z_0^{(m)}-z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}\le q_2\left\|z_0^{(m)}-z_0^*\right\|_{L_{\infty,\gamma}(\text{Ў}_{+})}.$$

Поскольку $0<q_2<1$, отсюда следует единственность решения $z_0^{(m)}=z_0^*$ уравнения Риккати (4).

V. Заключение

Полученное доказательство существования решения уравнения Риккати позволяет доказать стабилизацию решения для системы уравнений Годунова-Султангазина.

Численный эксперимент, проведенный Васильевой О. А., согласуется с теоретическими результатами.

Библиография

[1] Больцман Л. Избранные труды. М.: Наука. 1984. 590 с.

[2] Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи математических наук. 1974. Т. 26. Вып. 3 (159). С. 3-51.

[3] Веденяпин В.В. О разрешимости в целом задачи Коши для некоторых дискретных моделей уравнения Больцмана // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 215, № 1. С. 21-23.

[4] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова // М.: Физматлит. 2001. 112 с.

[5] Radkevich E.V., Vasil'eva O.A. Generation of chaotic dynamics and local equilibrium for the Carleman equation // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 224. Pp. 764-795.

[6] Васильева О.А., Духновский С.А., Радкевич Е.В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова-Султангазина // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т.60. С. 23-81.

[7] Nishida T., Mimura M. On the Broadwell's model for simple discrete velocity gas // Proceedings of the Japan Academy. 1974. Vol. 50, No. 10. Pp. 812-817.

[8] Радкевич Е.В. О дискретных кинетических уравнениях // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 4. С. 369-373.

[9] Духновский С.А. О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2017. Т. 21, № 1. С.7-41.

[10] Радкевич Е.В. О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С.108-139.

[11] Васильева О.А., Духновский С.А., Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестник МГСУ, 2015. № 7. С. 33-40.

[12] Васильева О.А. Численное исследование системы уравнений Годунова-Султангазина. Периодический случай // Вестник МГСУ. 2016. № 4. С. 27-35.

[13] Духновский С.А. Об оценках линеаризованного оператора кинетической системы Карлемана случай // Вестник МГСУ. 2016. № 9. С. 7-14.

Духновский Сергей Анатольевич,
преподаватель Московского государственного строительного университета (http://mgsu.ru),
email: sergeidukhnvskijj@rambler.ru
mathnet.ru: 121848
elibrary: authorid=798878.

Research of the Riccati equation for the one-dimensional Godunov-Sultangazin system

Sergey Dukhnovskii

***Abstract*—The study of kinetic nonlinear hyperbolic partial differential equations at large times belongs to the field of mathematical physics that has been actively developing recently.**

The kinetic theory considers gas as a combination of a huge number of moving particles interacting with each other. As a result of such interactions, the particles exchange momentum and energy. The interaction can be carried out by direct collision or by other forces. To describe the above assumptions, a number of models are proposed — the so-called discrete kinetic equations of Carleman, Godunov-Sultangazin, Broadwell where the unknown functions are particles densities depending on the space-time coordinates.

In this article the Riccati equation for the zero mode is researched obtained from the system of kinetic equations of Godunov-Sultangazin with periodic initial data. The system describes three groups of particles moving at three speeds. The first group moves at unit speed in a positive direction, and the third in the opposite direction. Particles of the second group move at zero speed. The solution of the system is found near the equilibrium state with small periodic perturbations. The solution of the Riccati equation is sought by the method of successive approximations. These perturbations are Fourier series. Theorems of global existence and uniqueness of the solution of the Riccati equation are proved.

***Keywords*—Godunov-Sultangazin system, perturbation, Riccati equation, Sobolev space.**

REFERENCES

[1] Boltzmann L. Selected works. Moscow, Nauka Publ., 1984. 590 p. (in Russian)

[2] Godunov S. K., Sultangazin U. M. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation // Russian Math. Surveys. 1971. Vol. 26, No. 3. Pp. 1-56.

[3] Vedenyapin V.V. On solvability of the Cauchy problem for some discrete models of Boltzmann's equation // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1974. Vol. 215, No. 1. C. 21-23. (in Russian)

[4] Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Amsterdam, Elsevier, 2011. 320 p.

[5] Radkevich E.V., Vasil'eva O.A. Generation of chaotic dynamics and local equilibrium for the Carleman equation // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 224. Pp. 764-795.

[6] Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A., Radkevich E.V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov-Sultangazin equations // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 235, No. 4. Pp. 392-454.

[7] Nishida T., Mimura M. On the Broadwell's model for simple discrete velocity gas // Proceedings of the Japan Academy. 1974. Vol. 50, No. 10. Pp. 812-817.

[8] Radkevich E.V. On discrete kinetic equations // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86, No. 3. Pp. 809-813.

[9] Dukhnovskii S. A. On a speed of solutions stabilization of the Cauchy problem for the Carleman equation with periodic initial data // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2017. Vol. 21, No. 1. Pp. 7-41. (in Russian)

[10] Radkevich E.V. On the large-time behavior of solutions to the Cauchy problem for the two-dimensional discrete kinetic equation // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 202, No. 5. Pp. 735-768.

[11] Vasil'eva O. A., Dukhnovskiy S. A. Secularity condition of the kinetic Carleman system // Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering. 2015. No. 7. Pp. 33-40.

[12] Vasil'eva O. A. Numerical solution of the Godunov-Sultangazin system of equations. Periodic case. Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 27-35. (in Russian)

[13] Dukhnovskiy S. A. On estimates of the linearized operator of the kinetic Carleman system // Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering. 2016. No. 9. Pp. 7-14. (in Russian)