

# Композиция бильярдных графов в представлении структуры множества натуральных как дискретной динамической системы и сингулярные мегаинтервалы

Г.Г. Рябов, В.А. Серов

**Аннотация**—Статья является продолжением развития исследований структуры натуральных с позиций представления множества натуральных в виде шести арифметических прогрессий и действий на этом множестве полугрупп по сложению и умножению, приводящего к динамической дискретной системе на основе построения бильярдного графа  $BG$ . На графе определены регулярные и сингулярные вершины, и соответствующие им натуральные. Последние, в свою очередь, индуцируют сингулярные круги—подмножества натуральных кластерного типа со специальным свойством парной аддитивности (пар простых и пар простое-составное). Дальнейшее рассмотрение приводит к введению, по аналогии с простыми-близнецами ( $PT$ ), составных-близнецов ( $CT$ ) и выдвигению гипотезы о равномоности этих подмножеств. Предложены приемы и приведены примеры конструирования сколь угодно больших составных-близнецов. Композиция  $BG$  представляет все фазовое пространство кратчайших траекторий между вершинами. Предложено объединение композиции бильярдных графов в единую, геометрико-топологическую форму в виде бесконечной треугольной призмы. Указаны признаки  $BG$ , близкие к квантово-механическим.

**Ключевые слова**—Множество натуральных, арифметические прогрессии, критерий Дирихле, регулярные и сингулярные натуральные, простые-близнецы, составные близнецы, квантовая механика.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные основы данного направления заложены в работах Д.В. Аносова по динамическим системам [1] и Я.Г. Синая по фокусирующим и рассеивающим бильярдным схемам [2].

В данной статье рассматривается *единая геометрическая конструкция*, в которую вкладываются бильярдные построения, применяемые при анализе структуры множества натуральных чисел и ее разбиение на *сингулярные мегаинтервалы*. Приведены сопоставления композиции с некоторыми *квантово-механическими свойствами*.

Статья получена 19 апреля 2018.

Г. Г. Рябов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия (e-mail: gen-ryabov@yandex.ru).

В. А. Серов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

## II. ИСХОДНЫЕ ПОЗИЦИИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Исходное представление множества неотрицательных натуральных как шесть арифметических прогрессий вида:  $a_0 + kd$ , где  $a_0 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ —начальные члены,  $d = 6$ —разность,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . В таком представлении каждое натуральное имеет единственное, однозначное место [3,4].

Сокращенно примем обозначения для прогрессий:  $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ . Каждая прогрессия—член двух полугрупп порядка 6, в соответствии с рис. 1.

+							
		$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
$S_2$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_2$	$S_3$	
$S_3$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	
$S_4$	$S_6$	$S_7$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	
$S_5$	$S_7$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	
$S_6$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	
$S_7$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_2$	

x							
		$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
$S_2$	$S_4$	$S_6$	$S_2$	$S_4$	$S_6$	$S_2$	
$S_3$	$S_6$	$S_3$	$S_6$	$S_3$	$S_6$	$S_3$	
$S_4$	$S_2$	$S_6$	$S_4$	$S_2$	$S_6$	$S_4$	
$S_5$	$S_4$	$S_3$	$S_2$	$S_7$	$S_6$	$S_5$	
$S_6$	$S_6$	$S_6$	$S_6$	$S_6$	$S_6$	$S_6$	
$S_7$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	

Рис.1 Бинарные отношения между  $S_2 - S_7$  по сложению и умножению. В аддитивной полугруппе роль “0” выполняет  $S_6$ , в мультипликативной полугруппе роль “1” выполняет  $S_7$ . Полугруппы конечные (по шесть инфинитарных членов).

В соответствии с рис.1 ассоциативные подгруппы действуют так: при  $a = 27 \in S_3$ ,  $b = 35 \in S_5$   
 $(a + b) = 62 \in (S_3 + S_5) = S_2$ ,  
 $(a \times b) = 945 \in (S_3 \times S_5) = S_3$ .

Дальнейшие построения реализуются с помощью плоской стандартной решетки  $L(1 \times 1)$  путем размещения в ее узлах множества вершин строящегося бильярдного графа  $BG$ , с маркировкой каждой вершины натуральным в порядке, соответствующем натуральному в  $S_2 - S_7$ . Ребра соединяют ближайшие вершины по диагонали и им присвоен вес  $q = |n_1 - n_2|$ , где  $n_1$  и  $n_2$  — натуральные, которыми маркированы вершины, инцидентные ребру. Ориентация ребра от меньшего натурального к большему. Для натуральных в полосе

$S5, S6, S7$  фрагмент графа  $BG$  показан на рис.2. Таким образом,  $q$  принимает лишь два значения: 5 и 7. Последующая раскраска вершин и ребер  $BG$  рассмотрена в [5,6] и приводит к полихромному решению раскраски вершин в четыре цвета (красный, синий, зеленый и желтый) для окраски вершин с простыми числами, плюс один нейтральный цвет (серый) для окраски вершин из  $S5$  и  $S7$  с составными натуральными. В те же четыре цвета окрашены все ребра  $BG$ . Множество ребер одного цвета отражает бильярдную траекторию  $BT$  бесконечных отражений (шара) от противоположных бортов. Можно считать, что каждому цвету  $BT$  соответствует свой слой и поэтому  $BT$  не пересекаются, т.е., с учетом окраски,  $BG$  –ориентированный, ациклический. На  $BG$  в полосе  $S5, S6, S7$  ( $BG(5,6,7)$ ) определяются множества регулярных вершин –  $VR$  и сингулярных вершин –  $VS$ .

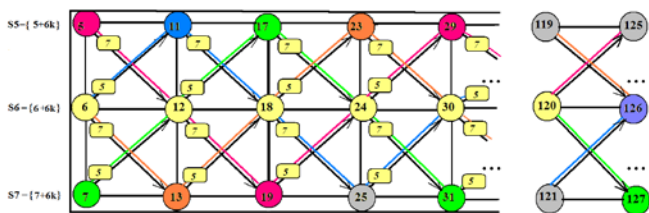


Рис.2 Фрагмент бильярдного графа  $BG$  в полосе  $S5, S6, S7$  ( $BG(5,6,7)$ ) с окраской вершин и ребер. Вершины маркированы натуральными числами, ребра – весами. Наименьшая среди натуральных чисел сингулярная вершина 126 отмечена сиреневым цветом.

**Определение.** Множество  $VR$  включает все вершины  $S6$ , у которых, по крайней мере, одна из двух ближайших предшествующих вершин маркирована простым (вершины с предшествующими простыми-близнецами относятся к  $VR$ ). Множество сингулярных вершин  $VS$  – когда обе предшествующие вершины маркированы составными (например, для сингулярной вершины 126:  $119=7*17$ ;  $121=11*11$ ). Показано, что сингулярных вершин бесконечно много и они индуцируют автоморфизмы кластерного типа-сингулярные круги натуральных, с аддитивным инвариантом, равным диаметру круга [5].

### III. КОМПОЗИЦИЯ БИЛЬЯРДНЫХ ГРАФОВ

По аналогии с  $BG(5,6,7)$ , рассматриваются варианты для  $BG(3,4,5)$  и  $BG(2,3,7)$ . Для объединения такой бильярдной (графовой) композиции в единую геометрико-топологическую форму рассмотрим бесконечную треугольную призму  $\Delta(\pm N)$  для дальнейшего отображения на ее ребра и грани структур  $BG(2,3,7)$ ,  $BG(5,6,7)$ ,  $BG(3,4,5)$ . Общая схема предлагаемого отображения и более детальная структура  $BG$  представлены на рис.3. На рис.3а показано расположение  $S2 - S7$  на ребрах и посередине граней. На рис.3б фрагмент  $BG$  с помеченными цветом  $BT$ . Общие характеристики  $BG$ : каждая вершина

инцидентна шести ребрам (трем входящим и трем исходящим), два ребра длиной 1, остальные – с весами  $q = 5, 7$ . Дальнейшее изложение предположим неформальным рассуждением, скорее метафорическим. Итак, построен бесконечный, ориентированный, полихромный, ациклический (с учетом окраски ребер и вершин) бильярдный граф  $BG$ . Пока ориентацией в нем служат только натуральные, которыми маркированы вершины. Претендентами на выделение более компактного описания больших интервалов натуральных могут являться сингулярные круги [5], мощность которых допускает экспоненциальный порядок роста их диаметра, и для которых существуют конструктивные методы построения сколь угодно больших сингулярных натуральных. Ограничимся здесь лишь одним, но характерным примером. Пусть дана полоса  $S5, S6, S7$  и в этой полосе мы хотим иметь метод построения сингулярного натурального, больше наперед заданного натурального  $n^*$ . Будем искать решение среди троек натуральных  $x_1, x_2, x_3$ , которые удовлетворяют следующим условиям: над алфавитом, соответствующим десятичной системе счисления  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ,

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0 \pmod{5} \\ x_2 &\equiv 0 \pmod{6} \\ x_3 &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Пусть искомое число (без ограничения общности будем считать его трехзначным) записано в виде  $\alpha_1\alpha_2\alpha_36$ . Тогда  $x_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_35$ , и, какими бы ни были « $\alpha$ », всегда  $x_1 \equiv 0 \pmod{5}$ . Таким образом, « $\alpha$ » зависят от удовлетворения свойств делимости  $x_2$  и  $x_3$ . Для  $x_2$  необходимым условием является, чтобы оно было четным и делилось на 3. Для  $x_3$   $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$  должно делиться на 7. Оба этих условия должны выполняться совместно. Для этого выберем число  $42=6*7$  для которого сумма цифр  $4+2=6$  кратна 3 и, следовательно, последовательность  $4242\dots42$  всегда делится на 3 и, к тому же, четная. В простейшем случае, при трехзначных числах мы имеем предсингулярную тройку (в полосе натуральных  $S5, S6, S7$ ) для сингулярного натурального 432:

$$\begin{aligned} x_1 &= 425 \\ x_2 &= 426 \rightarrow 426 + 6 = 432; \\ x_3 &= 427 \end{aligned}$$

Метод допускает произвольное расширение записи чисел предсингулярных троек вида:

$$\begin{aligned} &4242\dots425 \\ &4242\dots426 \\ &4242\dots427, \end{aligned}$$

для сколь угодно больших сингулярных натуральных вида:  $4242...432$ , а, следовательно, сингулярных кругов сколь угодно больших диаметров, которые можно

использовать как мегаинтервалы разбиения натуральных, отображенных на призму  $\Delta(-N, +N)$ .

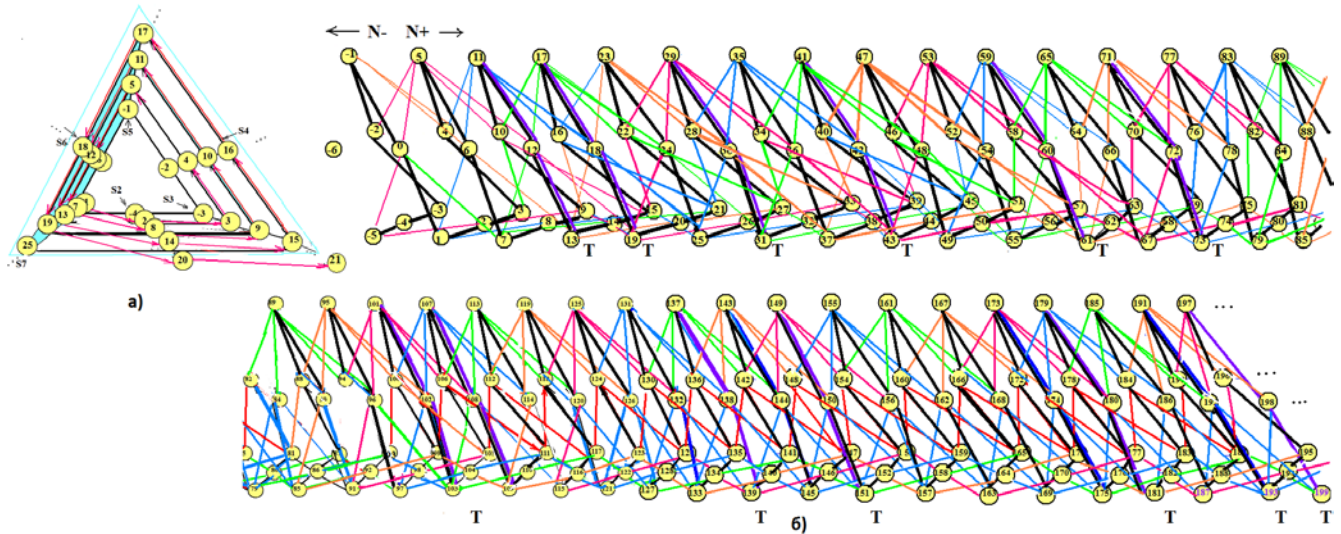


Рис.3 а). Вид фрагмента трехгранной призмы и расположения на ее поверхности натуральных из  $S2 - S7$ . б). Фрагмент  $BG$  со всеми вершинами и ребрами. Лиловым цветом окрашены ребра троек с простыми-близнецами (Т), темно синим – тройки-предшественники. Остальные ребра лежат на бильярдных траекториях  $BT$  (с весами  $q_1 = 5, q_2 = 7$ ) и окрашены в цвета, указанные при построении  $BG$ .

Возвращаясь к композиции  $BG$ , отметим, что анализ ее может быть достаточно разнообразен, поскольку она представляет все фазовое пространство кратчайших траекторий на  $BG$  (при исходной решетке  $L(1 \times 1)$  для вершин  $BG$ ), которые соответствуют движению материальной точки (шара), направленной под углом  $\angle\beta = \pi/4$  по отношению к борту. Рассмотрим возможности расширения конструкции  $BG$  за счет расширения диапазона  $\angle\beta$ . Для этого будем брать исходные решетки вида  $L(1 \times k)$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда,  $\angle\beta = \arctg(1/k)$ . В соответствии с правилами конструкции  $BG$  и его маркировки [5,6] для  $k = 1, 2, 3$  мы получим локальные конструкции вместе с их маркировкой, которые показаны на рис.4 (без ограничения общности выбрана полоса  $S5, S6, S7$  и вершина, маркированная натуральным 54).

натуральными 53, 54, 55 и исходных решеток  $L(1 \times 1)$ ,  $L(1 \times 2)$ ,  $L(1 \times 3)$ .

Отметим, что чтобы включить билинейные колебания с другими периодами не обязательно рассматривать представление множества натуральных на базе новой разности  $d$  прогрессии. Так, для  $d = 12$  прогрессии при  $a < 8$ :  $S(a, 12) \subset S(a, 6)$  и поэтому достаточно, чтобы учесть билинейные колебания с другими периодами (длинами волн) пополнить множество ребер  $BG$  новыми весами  $q$ . Такое пополнение можно выполнять бесконечно, включая в  $BG$ , говоря инженерным языком, как в волновод возможность прохождения все более длинных волн (в нашем случае билинейной формы). Если принять, что проход по одному ребру  $BG$  (независимо от веса  $q$  этого ребра) равен единице дискретного времени, то можно получить случайный разброс  $BT$  и вершин  $BG$ , через которые прошла или прошли  $BT$  за время  $\Delta t$ . По существу, мы сопоставляем движение частицы по  $BT$  с поиском кратчайшего пути в  $BG$ .

Специальный подграф в  $BG$ , все вершины которого имеют вес  $q = 1$ , можно считать счетчиком дискретного времени или синхронизатором динамической системы- $GS$ . Указав вершину в  $GS$  (с натуральным, равным дискретному времени  $t$ ) можно вычислить вероятностное распределение, где за это время могли побывать  $BT$ . А это уже явно признак свойства квантовой механики. Некоторое представление о характере нарастания такого числа ребер в  $BT$  может дать рис.5 в интервале дискретного времени  $t = 10$  (ребра красного цвета),  $t = 11$  (ребра синего цвета),  $t = 12$  (ребра зеленого цвета).

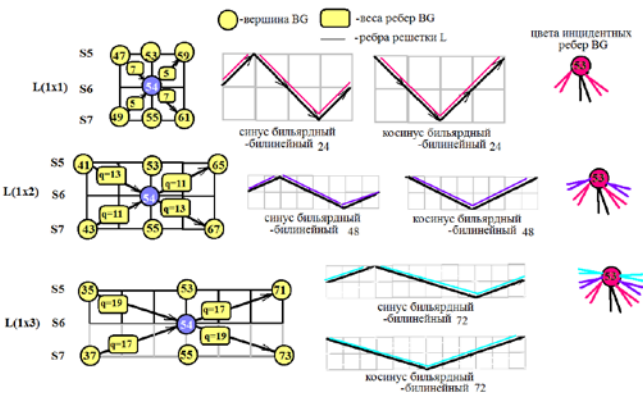


Рис.4. Расширение множества ребер графа  $BG$  – следствие учета бильярдных траекторий под другими углами  $\angle\beta$  к борту и увеличения периода функций  $sib$ ,  $cob$  и др. Показана ситуация для тройки вершин с

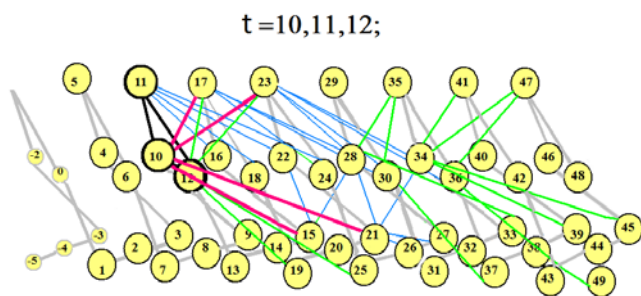


Рис.5 Фрагмент  $BG$  и  $BT$  с ребрами на допустимых кратчайших путях частиц за дискретное время  $t = 10, 11, 12$ .

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Последний раздел располагает к анализу связи между  $BG$  в структуре натуральных и струнными моделями, используемыми для квантово-механического представления поведения элементарных частиц.

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Аносов Д.В. Гладкие динамические системы // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1985. т. 1, с. 151-240.
- [2] Бунимович Л.А., Синай Я.Г., Чернов Н.И. Статистические свойства двумерных гиперболических билиардов. Успехи мат. наук, 1991. т. 46, вып. 4 (280), с. 43-92.
- [3] Рябов Г.Г., Серов В.А. О структуре натуральных чисел на базе шести арифметических прогрессий. // International Journal of Open Information Technologies. 2016. т.4, № 4, с. 49-53. <http://injoit.org/index.php/j1/article/download/277/235>
- [4] Рябов Г.Г., Серов В.А. Бесконечные арифметические прогрессии и глобальные деревья в структуре натуральных. // International Journal of Open Information Technologies. 2017. т. 5, № 6, с. 1-5. <http://injoit.org/index.php/j1/article/download/441/411>
- [5] Рябов Г.Г., Серов В.А. Сингулярность как эзотерическая сторона структуры натуральных чисел. // International Journal of Open Information Technologies. 2018. т. 6, № 3, с. 27-31. <http://injoit.org/index.php/j1/article/download/548/524>
- [6] Рябов Г.Г. Представление множества натуральных чисел в виде динамической системы дискретного времени. // International Journal of Open Information Technologies. 2017. т. 5, № 8, с. 27-34. <http://injoit.org/index.php/j1/article/download/464/441>

# The composition of billiard graphs in the representation of the natural numbers structure as a discrete dynamical system and singular mega-intervals

G. G. Ryabov, V. A. Serov

**Abstract**—The article is a continuation of the natural numbers structure research from the position of representation in the form of six infinite arithmetic progressions and addition and multiplication semi-group actions on this set. Such representation leads to the dynamic discrete system on the basis of the billiard graph (BG) creation. The regular and singular vertices, and corresponding natural numbers are defined on the graph. The singular vertices induce the singular circles- cluster type subsets of natural numbers with a special property of pair additivity (prime-prime and prime-composite pairs). Further consideration leads to the introduction of the composite twins (CT) by analogy with the twin primes (PT), and the hypothesis of the equivalence of these subsets. Methods and examples of constructing arbitrarily large composite twins are given. The BG composition represents the entire phase space of the shortest paths between vertices. The union of BG compositions into a single, geometric-topological form (infinite triangular prism) is proposed. BG features close to the quantum-mechanical are shown.

**Keywords**—set of natural numbers, arithmetical progression, Dirichlet condition, singular numbers, twin prime, twin composite, quantum mechanics.