Оптимизация маркетинговой стратегии торговой фирмы

Д.В. Денисов, В.В. Латий

***Аннотация* — Целью настоящей работы является построение модели торговой фирмы специального вида и оптимизация ее затрат на маркетинг. В качестве основного метода, применяемого для решение возникающих оптимизационных задач, был выбран метод поиска обобщенных равновесий Нэша (Generalized Nash Equilibrium Problem). В рамках работы были исследованы возможность и целесообразность применения обозначенного подхода в условиях связанности ограничений на маркетинговый бюджет, а также была доказана возможность сведения основной оптимизационной задачи к более простому виду.**

***Ключевые слова* — GNEP, маркетинг, обобщенное равновесие, оптимизация, экономическая модель.**

I. Введение

Развитие любой фирмы, занимающейся продажами, неизбежно связано с необходимостью привлечения новых покупателей. Одним из ключевых способов добиться этого является оптимально организованная маркетинговая стратегия. Организации, которые наиболее эффективно распоряжаются ресурсами при планировании маркетингового бюджета, занимают на рынке более выигрышные позиции. В условиях, когда денежные ресурсы не ограничены, можно проводить сколь угодно эффективные маркетинговые кампании. Однако в реальности, чаще всего, рекламный бюджет имеет строгие рамки, что влечет необходимость его грамотного распределения.

В данной работе рассмотрена математическая модель одной фирмы, осуществляющей продажи некоторого товара. Описываемая фирма разделена на представительства в отдельных регионах (например, крупные магазины), целью каждого из которых является достижение наилучших показателей выполнения плана продаж по сравнению с остальными регионами. Каждое представительство имеет свой маркетинговый бюджет, утверждаемый головным подразделением, который не может превосходить общего маркетингового бюджета. В рамках данной модели глобальной целью фирмы является развитие всех представительств (регионов), поэтому возникает задача оптимального распределения маркетингового бюджета по регионам.

В [1] изучается модель динамики охвата рынка фирмой-монополистом. Данный процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением с управлением, в качестве которого выступает интенсивность рекламы.

В [2] рассматривается выбор оптимальных рекламных стратегий в рамках модели двух фирмы, действующих на рынке постоянной емкости, с единственным рыночным инструментом – рекламой.

Развитие данных моделей можно найти, например, в [3] и [4].

В указанных выше работах рассматривается непрерывная динамика изменения долей рынка, в связи с чем используются методы оптимального управления и аппарат дифференциальных игр. Основным отличием настоящей работы от перечисленных выше является описание дискретной одношаговой модели, в рамках которой объектом оптимизации становится маркетинговый бюджет, а конкурентами являются подразделения одной фирмы. Подобный подход удобно применять, например, при планировании краткосрочного рекламного бюджета.

II. Построение модели

Рассмотрим множество подразделений (регионов) A. Будем считать, что цена на товар постоянна и равна p. Обычно при рассмотрении краткосрочного периода предположение о постоянстве цены вполне обосновано, так как в течение небольшого промежутка времени цена не успевает измениться под действием различных факторов, таких как инфляция, рост или падение спроса, изменение курсов валют и т.д. Обозначим за V_i объем товара, продаваемого подразделением $i \in A$, и за D_i – доля общего спроса, приходящаяся на подразделение $i \in A$.

Целью каждого подразделения $i \in A$ является максимизация собственной прибыли от продаж, т.е. возникает задача

$$pV_i - c_i \to \max_{V_i \in U_i, c_i \in C_i},$$

где c_i – затраты подразделения, связанные с реализацией товара, U_i и C_i – некоторые подмножества $\mathbb{R}_+$. При этом головное подразделение не стремится к максимизации суммарной прибыли, а поддерживает стратегию развития каждой торговой единицы.

Статья получена 13 июля 2017. Работа представляет собой результат кандидатской диссертации.

Д. В. Денисов, к.ф.-м.н., МГУ им. М. В. Ломоносова, dvden@cs.msu.su
В. В. Латий, аспирант, МГУ им. М. В. Ломоносова, latiy_v@mail.ru

Будем считать, что каждое подразделение всегда может удовлетворить спрос на товар, что означает равенство продаваемого объема спросу: $V_i = D_i, i \in A$.

Рассмотрим более детально расходы c_i, связанные с продажей. Под такими расходами мы будем понимать затраты на увеличение спроса D_i на некоторую величину $f(c_i) > 0$. На практике спрос чаще всего увеличивают маркетинговые акции, рекламные кампании, введение специальных предложений и т.п. Как правило, маркетинговый бюджет на финансовый год заранее рассчитан и ограничен. Это означает, что суммарные траты на маркетинг не могут превосходить некоторой конечной величины C_0. Таким образом, должно выполняться ограничение $\sum\limits_{i \in A} c_i \le C_0$.

Опишем механизм, с помощью которого может увеличиваться спрос на товар. Для этого определим на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ непрерывную дважды дифференцируемую функцию $f(d,c)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\forall d \ge 0,\ \forall c \ge 0 : f(d,c) \ge 0$
2. $\forall d \ge 0 : f(d,c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$
3. $\forall c \ge 0 : \dfrac{\partial f(d,c)}{\partial d} \le 0$
4. $\forall d \ge 0 : \dfrac{\partial f(d,c)}{\partial c} \ge 0$
5. $\forall c \ge 0 : \dfrac{\partial^2 f(d,c)}{\partial d^2} \ge 0$
6. $\forall d \ge 0 : \dfrac{\partial^2 f(d,c)}{\partial c^2} \le 0$

Данные условия получены из следующих естественных предположений:

1. Спрос увеличивается тогда и только тогда, когда для этого прикладываются усилия
2. Чем больше ресурсов тратится на увеличение спроса, тем сильнее он увеличивается, однако, полезность трат уменьшается с их ростом
3. Чем выше уровень спроса на товар, тем труднее добиться его увеличения.

Рассмотрим процесс изменения спроса подразделения $i \in A$. Оно обладает возможностью увеличить спрос на величину $f(D_i, c_i)$. В этом случае изменение значения спроса D_i происходит в два этапа:

1. Увеличение спроса на товар подразделения $i \in A$ на величину $f(D_i, c_i)$
2. Уменьшение спроса на товар подразделения $i \in A$ после действий остальных подразделений $j \in A \setminus \{i\}$

Замечание. В общем случае можно считать, что на уменьшение спроса подразделения $i \in A$ влияют все остальные подразделения, однако, на практике существенное влияние заметно только в пределах одного региона: несколько крупных магазинов в одном городе или подобная ситуация.

Таким образом, в общем случае новый спрос имеет вид $D_i^*(c) = D_i + f_i(D_i, c_i) - \Delta(D_{-i}, c_{-i}, \theta_{-i})$, где $\Delta(D_{-i}, c_{-i}, \theta_{-i})$ – влияние действий остальных подразделений, c_{-i} и D_{-i} – векторы затрат и спросов без компоненты i, θ_{-i} – параметр падения.

III. Задача оптимизации

После двух этапов изменения спроса, описанных выше, получим:

$$\forall i \in A : D_i^* = D_i + f_i(D_i, c_i) - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \theta_j^i f_j(D_j, c_j),$$
$$0 \le c_i \le C_0 - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} c_j,$$

где $\theta_j^i \in [0,1]$ – коэффициент влияния подразделения j на долю спроса подразделения i. Пусть он удовлетворяет следующим условиям:

1. $\sum\limits_{i \in A \setminus \{j\}} \theta_j^i \le 1, \forall j \in A$
2. $D_j - \sum\limits_{i \in A \setminus \{j\}} \theta_i^j f_i(D_i, c_i) \ge 0, \forall j \in A$

Первое условие означает, что влияние подразделения j на доли спроса остальных подразделений в сумме не превосходит величины, на которую растет его собственная доля. Второе условие ограничивает общее влияние подразделений на спрос подразделения j, гарантируя неотрицательность спроса.

Замечание. Как уже упоминалось, в действительности не каждое подразделение влияет на спрос подразделения i, а лишь те, которые с ним "территориально близки". В разных ситуациях степень такой близости можно рассматривать по-разному, что является одной из задач отделов маркетинга и анализа. Таким образом, кроме уже описанного варианта изменения спроса, возможны еще два частных случая:

1. Не все подразделения "территориально близки"

$$\forall i \in A : D_i^* = D_i + f_i(D_i, c_i) - \sum_{j \in A_i^*} \theta_j^i f_j(D_j, c_j),$$
$$0 \le c_i \le C_0 - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} c_j,$$

где A_i^* – множество "территориально близких" подразделений к подразделению i.

2. Все подразделения находятся в разных регионах

$$\forall i \in A : D_i^* = D_i + f_i(D_i, c_i),$$
$$0 \le c_i \le C_0 - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} c_j.$$

Исходя из этого, можем получить общую задачу оптимизации:

$$\begin{cases} pD_i^*(c) - c_i \to \max_{c_i}, \forall i \in A \\ 0 \le c_i \le C_0 - \sum\limits_{j \in A \setminus \{i\}} c_j \end{cases} \qquad (1)$$

где $c = (c_i)_{i \in A}$.

Задача (1) состоит в поиске вектора оптимальных стратегий затрат $c = (c_i)_{i \in A}$ при условии, что для каждого подразделения i множество возможных стратегий $C_i(c_{-i})$, $c_{-i} = (c_j)_{j \in A \setminus \{i\}}$ зависит от выборов c_j остальных подразделений $j \in A \setminus \{i\}$. Задачи, подобные (1), где множества возможных стратегий каждого игрока зависят от действий остальных игроков, называются *задачами поиска обобщенного равновесия Нэша*. Следуя обозначениям, принятым в [5], переформулируем задачу (1). Для этого введем

Определение. *Пусть для* $\forall i \in A$ *дана задача вида*

$$\theta_i(x_i, x_{-i}) \to \min_{x_i}, x_i \in X_i(x_{-i}) \qquad (2)$$

Для каждого x_{-i} *множество решений (2) обозначим за* $S_i(x_{-i})$. *Тогда точка* $\overline{x}$ *называется обобщенным равновесием Нэша (ОРН), если* $\forall i \in A : \overline{x}_i \in S_i(\overline{x}_{-i})$.

Задача поиска таких равновесий называется Generalized Nash Equilibrium Problem (GNEP).

Используя обозначения, введенные в определении, можем привести задачу (1) к виду

$$\theta_i(c_i, c_{-i}) = c_i - pD_i^*(c) \to \min_{c_i}, \ \sum_{j \in A} c_j \le C_0, \ c \ge 0. \qquad (3)$$

При этом множества решений имеют вид

$$C_i(c_{-i}) = \{c_i : 0 \le c_i \le C_0 - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} c_j\}.$$

Полученная задача является *совместно-выпуклой*, т.е. существует такое замкнутое выпуклое множество $C \subseteq \mathbb{R}^{|A|}$, что для каждого $i \in A$

$$C_i(c_{-i}) = \{c_i \ge 0 : (c_i, c_{-i}) \in C\}.$$

Отметим, что для задачи (3):

$$C = \{c \in \mathbb{R}_+^{|A|} : \sum_{i \in A} c_i \le C_0\}.$$

IV. Исследование существования ОРН

Прежде всего исследуем систему (3) на предмет существования обобщенного равновесия Нэша. Для этого воспользуемся следующим частным случаем теоремы 6 из [5]:

Теорема (существования ОРН). *Пусть дана задача (2) поиска обобщенного равновесия Нэша и для нее выполнены условия:*

1) Существуют непустые выпуклые компакты $K_i \subset \mathbb{R}, i \in A$, *такие, что для каждого* $x \in \mathbb{R}^{|A|}$, *где* $x_i \in K_i, \forall i \in A$, *множества* $X_i(x_{-i})$ *– непустые, замкнутые и выпуклые,* $X_i(x_{-i}) \subseteq K_i$ *и* X_i, *как точечно-множественные отображения, полунепрерывны сверху и снизу одновременно.*

2) Для каждого $i \in A$ *функция* $\theta_i(\cdot, x_{-i})$ *квазивыпуклая на* $X_i(x_{-i})$

Тогда в задаче (2) существует ОРН.

Утверждение 1. *В задаче (3) существует ОРН.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно проверить выполнение условий 1 и 2 теоремы существования ОРН.

1) Обозначим $K_i = [0, C_0], i \in A$.

Тогда для каждого $i \in A$ множества $C_i(c_{-i}) = \{c_i \mid 0 \le c_i \le C_0 - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} c_j\} \subseteq K_i$ – непустые, замкнутые и выпуклые. Очевидно, что для любого $i \in A$, $C_i(c_{-i})$ – непрерывные точечно-множественные отображения.

2) Зафиксируем произвольные $i \in A$ и c_{-i}.

Рассмотрим на множестве $C_i(c_{-i})$ функцию

$$\begin{aligned} \theta_i(c_i, c_{-i}) = c_i - p(D_i + f_i(D_i, c_i) - \\ - \sum\nolimits_{j \in A \setminus \{i\}} \theta_j^i f_j(D_j, c_j)) \end{aligned} \qquad (4)$$

Так как $c_i - pf_i(D_i, c_i)$ – выпукла на $C_i(c_{-i})$, а остальные члены не зависят от c_i, получаем, что функции $\theta_i(c_i, c_{-i}), \forall i \in A$ также выпуклы на $C_i(c_{-i})$. Из выпуклости функций следует их квазивыпуклость.

Утверждение доказано.

Таким образом, мы получили, что в задаче (3) существует ОРН. Для его поиска рассмотрим функцию

$$\Psi(c, \zeta) = \sum_{i \in A} \left[\theta_i(c_i, c_{-i}) - \theta_i(\zeta_i, c_{-i}) \right]. \qquad (5)$$

Известно ([5], [6]), что для случая совместно-выпуклой задачи, $\overline{c} \in C$ является ОРН в том и только том случае, если $\overline{c}$ – решение задачи минимизации

$$\min_{c \in C} \sup_{\zeta \in C(c)} \Psi(c, \zeta) \qquad (6)$$

и $\sup\limits_{\zeta \in C(\overline{c})} \Psi(\overline{c}, \zeta) = 0$, где $C(c) = \prod\limits_{i \in A} C(c_{-i})$.

Подставляя (4) в (5), получим

$$\Psi(c, \zeta) = \sum_{i \in A} \left[c_i - \zeta_i + p(f_i(D_i, \zeta_i) - f_i(D_i, c_i)) \right]$$

и задача (6) примет вид

$$\min_{c \in C} \left[\sum_{i \in A} \left[c_i - pf_i(D_i, c_i) \right] - \inf_{\zeta \in C(c)} \sum_{i \in A} \left[\zeta_i - pf_i(D_i, \zeta_i) \right] \right].$$

В общем случае функция, стоящая под знаком минимизации, недифференцируема, что затрудняет численное решение.

Замечание. В некоторых случаях размерность получившейся задачи можно уменьшить, если исключить из рассмотрения $i \in A$, для которых $\forall c_i \in [0, C_0]$ функция возрастает.

Полученная оптимизационная задача, даже с учетом замечания, является в общем случае достаточно сложной для применения как аналитического, так и численного методов решения, поэтому далее мы будем рассматривать в качестве объекта поиска не все множество ОРН, а только его специальное подмножество, для которого данная задача решается сравнительно просто.

V. Нормализованное равновесие

Рассмотрим функцию

$$F(c) = \sup_{\zeta \in C} \Psi(c, \zeta).$$

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(c) \geq 0, \forall c \in C$

2) $F(c) \geq \sup\limits_{\zeta \in C(c)} \Psi(c, \zeta), \forall c \in C$, так как для каждого $c \in C$ выполнено включение $C(c) \subseteq C$.

Из этого автоматически следует, что если $\bar{c} \in C$ – решение уравнения $F(c) = 0$, то $\bar{c}$ – также решение основной задачи поиска ОРН. Однако обратное в общем случае неверно.

Такие решения (см. [6], [7]) называются *нормализованными равновесиями* задачи (2) и наши дальнейшие исследования будут посвящены именно их поиску. Заметим, что нормализованное равновесие является в общем случае более устойчивым, чем остальные ОРН (см. [8]) и более предпочтительным применительно к задачам распределения ресурсов. Далее мы докажем, что в условиях исходной задачи такое равновесие всегда существует и, более того, является единственным.

Утверждение 2. *В задаче (3) существует единственное нормализованное равновесие.*

Доказательство. **Существование**. Докажем, что существует вектор c^*, удовлетворяющий условию $\sum\limits_{i \in A} c_i^* \leq C_0$, такой что функция $F(c)$ обращается на нем в нуль. Так как множество C замкнуто, то $F(c) = \max_{\zeta \in C} \Psi(c, \zeta)$, следовательно, максимум достигается в некоторой точке $\zeta^* \in C$. Тогда по определению функции $\Psi(c, \zeta)$ получаем

$$F(\zeta^*) = \Psi(\zeta^*, \zeta^*) = 0.$$

Единственность. Докажем теперь, что ζ^* – единственный вектор, на котором $F(c) = 0$. Рассмотрим функцию $F(c)$:

Поскольку функция $\phi(x) = \sum\limits_{i \in A} \left[x_i - p f_i(D_i, x_i) \right]$ строго выпукла, ее минимум достигается в единственной точке ζ^*. Следовательно, функция $F(x) = \phi(x) - \phi(\zeta^*)$ также обращается в нуль на единственном векторе ζ^*.

Утверждение доказано.

Теорема (об эквивалентности задач). *Нормализованное равновесие задачи (3)*

$$\theta_i(c_i, c_{-i}) = c_i - pD_i^*(c) \to \min_{c_i}, \ \sum_{j \in A} c_j \leq C_0, \ c \geq 0$$

совпадает с решением задачи

$$\sum_{i \in A} \theta_i(c) \to \min_{c = (c_i)_{i \in A}}, \ \sum_{i \in A} c_i \leq C_0, \ c \geq 0 \qquad (7)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения сведем последовательно обе задачи к эквивалентным формулировкам. Рассмотрим функцию $F(c)$ для задачи (3):

$$\begin{aligned} F(c) &= \sup_{\zeta \in C} \Psi(c, \zeta) = \\ &= \max_{\zeta \in C} \sum_{i \in A} \left[c_i - \zeta_i + p(f_i(D_i, \zeta_i) - f_i(D_i, c_i)) \right] \end{aligned} \qquad (8)$$

Функция $\Psi(c, \zeta)$ вогнута по ζ, следовательно, поиск оптимального ζ^* является задачей выпуклой оптимизации. Известно (см. [9]), что для задачи выпуклой оптимизации ζ оптимальна тогда и только тогда, когда $\zeta \in C$ и для любого $x \in C$

$$\nabla_\zeta \Psi(c, \zeta)^T (x - \zeta) \leq 0.$$

Рассмотрим задачу (7) и обозначим $G(c) = \sum\limits_{i \in A} \theta_i(c)$. Тогда

$$\min_{c \in C} G(c) = \min_{c \in C} \sum_{i \in A} \left[c_i - p(D_i + f_i(D_i, c_i)) \right].$$

Функция $G(c)$ выпукла по c и, значит, c оптимальна тогда и только тогда, когда $c \in C$ и для любого $y \in C$

$$\nabla G(c)^T (y - c) \geq 0.$$

Рассмотрим $\nabla G(\zeta)$ и $\nabla_\zeta \Psi(c, \zeta)$:

$$\nabla G(\zeta) = \left(\frac{\partial G(\zeta)}{\partial \zeta_i} \right)_{i \in A} = \left(1 - p \frac{\partial f_i(D_i, \zeta_i)}{\partial \zeta_i} \right)_{i \in A},$$

$$\nabla_\zeta \Psi(c, \zeta) = \left(\frac{\partial \Psi(c, \zeta)}{\partial \zeta_i} \right)_{i \in A} = \left(-1 + p \frac{\partial f_i(D_i, \zeta_i)}{\partial \zeta_i} \right)_{i \in A}.$$

Из полученных соотношений можно заметить, что $\nabla G(\zeta) = -\nabla_\zeta \Psi(c, \zeta)$. Таким образом, решение задачи (7) совпадает с решением задачи (8). Из Утверждения 2 следует, что данное решение является нормализованным равновесием.

Теорема доказана.

Полученный результат, во-первых, помогает свести исходную задачу к более простой форме, а, во-вторых, имеет очень важный экономический смысл. В задаче (3) целью фирмы являлось оптимальное распределение денежных ресурсов для развития каждого подразделения, в то время, как в задаче (7) целью является максимизация суммарной прибыли фирмы.

Таким образом, для данной модели оптимальное (с точки зрения нормализованного равновесия) развитие подразделений происходит тогда и только тогда, когда суммарная прибыль фирмы максимальна.

VI. Заключение

В данной работе мы построили математическую модель фирмы со структурой "головная компания-руководитель – региональные подразделения" и рассмотрели механизм маркетингового влияния на спрос для каждого подразделения. В процессе рассмотрения мы получили основную задачу оптимизации со связанными ограничениями, решению которой посвящена большая часть данной работы.

Мы исследовали построенную задачу оптимизации и доказали для нее существование обобщенного равновесия. Далее мы поставили дополнительную задачу поиска нормализованного равновесия, которое, по нашему мнению, является наиболее интересным и предпочтительным для исследования в рамках модели. Основным результатом данной работы является доказательство эквивалентности проблемы поиска нормализованного равновесия исходной задачи решению задачи максимизации суммарной прибыли фирмы.

Библиография

[1] S. P. Sethi, Deterministic and Stochastic Optimization of a Dynamic Advertising Model. Optimal Control Application and Methods 4 (2): 179–184, 1983.

[2] G. Sorger, Competitive dynamic advertising: A modification of the Case game. Journal of Economic Dynamics and Control 13 (1989) 55-80.

[3] F. M. Bass, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S. P. Sethi. Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly. Marketing Science 24 (4) (2005) 556-568.

[4] A. Prasad, S.P. Sethi, Competitive advertising under uncertainity: A stochastic differential game approach. Journal of Optimiztion Theory and Applications 123(1) (2004) 163-185.

[5] F. Facchinei, C. Kanzow. Generalized Nash equilibrium problems. A Quaterly Journal of Operations Research, Volume 5, Issue 3, pp 173-210, 2007.

[6] A. von Heusinger, C. Kanzow. Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido–Isoda-type functions. Technical Report, Institute of Mathematics, University of Wurzburg, Wurzburg, 2006.

[7] A. von Heusinger, C. Kanzow. SC1 optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem. Technical Report, Institute of Mathematics, University of Wurzburg, Wurzburg, 2007.

[8] E. Cavazzuti, M. Pappalardo, M. Passacantando. Nash equilibria, variational inequalities, and dynamical systems. J Optim Theory Appl 114:491–506, 2002.

[9] S. Boyd, L.Vanderberghe. Convex Optimization. Cambridge University Press New York, NY, USA, 2004.

[10] P. Kaminsky, D. Simchi-Levi. Production and distribution lot sizing in a two-stage supply chain. IIE Transactions (2003) 35, 1065–1075.

[11] G. Debreu. A social equilibrium existence theorem. Proc Natl Acad Sci 38:886–893, 1952.

[12] D. P. Bertsekas. Nonlinear Programming. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.

[13] J. Barzilai and J. M. Borwein. Two point step size gradient method. IMA Journal on Numerical Analysis 8, 1988, pp. 141–148.

[14] L. Peiyu, L. Guihua. Solving a class of generalized Nash equilibrium problems. Journal of Mathematical Research with Applications, May, 2013, Vol. 33, No. 3, pp. 372-378.

[15] T. G. Kolda, R. M. Lewis, V. Torczon. Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods. SIAM REVIEW, Vol. 45, No . 3,pp . 385–482, 2003.

Optimization of the marketing strategy of a trading company

D.V. Denisov, V.V. Latiy

***Abstract* — The purpose of this work is to describe the model of a special type of trading company and to optimize its marketing costs. The main approach used to solve optimization problems arising is a method of finding generalized Nash equilibria (Generalized Nash Equilibrium Problem). Within the paper the possibility and expediency of applying this approach in the context of constraints on the marketing budget were investigated, and the possibility of reducing the main optimization problem to a simpler form was proved.**

***Keywords* — economic modelling, generalized Nash equilibrium problem, GNEP, marketing, optimization.**