International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol. 4, no. 9, 2016

Коэффициенты рядов в асимптотических разложениях решений уравнений с вырождениями

Д.С. Кац

***Аннотация* — Исследуются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами. Находятся решения уравнений с постоянными коэффициентами вырождающегося оператора. Для уравнений с переменными коэффициентами оператора, основные символы которых не имеют кратных корней, вычисляются коэффициенты в асимптотических разложениях решений. В обоих случаях показывается, что количество произвольных постоянных, содержащихся в решении совпадает с порядком уравнения.**

***Ключевые слова* — асимптотика, вырождение, дифференциальные уравнения, ресургентный анализ.**

I. Введение

В данной работе исследуются асимптотические разложения в нуле решений уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{m} a_m(r) \frac{d^i}{dr^i} u(r) = 0, \quad (1)$$

где в левой части находится дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами. Задачи построения асимптотических разложений решений таких уравнений, а также систем уравнений первого порядка в нуле и на бесконечности (одна задача сводится к другой с помощью замены $z = 1/r$) рассматривались и ранее — например, в книгах [1, 2, 3]. Одной из существенных проблем была интерпретация получавшихся расходящихся рядов. В данной работе полученные асимптотики гарантированно сходятся к решениям соответствующих уравнений в смысле обобщенного суммирования с помощью преобразования Лапласа-Бореля.

В работе [4] показано, что уравнения с вырождениями в коэффициентах (1) эквивалентны уравнениям с вырождениями в символе

$$H\left(r, -\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr}\right) u(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m} \tilde{a}_i(r) \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr}\right)^i u(r) = 0, \quad (2)$$

где функции $\tilde{a}_m(r)$ — голоморфные, и $\tilde{a}_n(0) \neq 0$. Такие уравнения рассматривались ранее. В частности, в работе [5] для случая $k = 1$, а в работе [6] для случая $k > 1$ было доказано, что такие уравнения имеют ресургентные решения, что позволило применять для их исследования преобразование Лапласа-Бореля и методы ресургентного анализа, основанного на понятии ресургентной функции, впервые введенном Ж. Экалем [7]. Стоит отметить, что уравнения, подобные (2) возникают естественным образом при исследовании уравнений на многообразиях с особенностями типа «клюва». Например, в работе [8] на многообразии с такой особенностью было решено уравнение Лапласа.

Основы ресургентного анализа и теории преобразования Лапласа-Бореля можно найти, например, в книге [9].

В работе [5] для случая $k = 1$, а в работе [10] — для случая $k > 1$ был найден вид асимптотических разложений решений уравнений (2) в случае, когда корни полинома $H_0(p) = H(0, p)$ являются простыми. При этом, как это было показано в тех работах, ресургентная функция $u(r)$ представляется в виде

$$u(r) = \sum_j u_j(r), \quad (3)$$

где сумма берется по объединению p_j корней полинома $H_0(p)$, а функции $u_j(p)$ имеют в нуле асимптотические разложения

$$u_j(r) = \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^j r^i, \quad (4)$$

в случае $k = 1$ и

$$u_j(r) = \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^j r^i, \quad (5)$$

в случае $k > 1$. Здесь α_{k-i}^j, σ_j, s_i^j — некоторые числовые коэффициенты. В тех же работах коэффициенты α_{k-i}^j и σ_j были найдены для случаев $k = 1$ и $k = 2$. В работе [4] эти коэффициенты были вычислены для случая $k > 2$.

В данной работе вычисляются коэффициенты s_i^j в асимптотиках (4), (5), а также решаются уравнения вида (2) в случае, когда коэффициенты оператора $\hat{H}$ являются постоянными, но полином $H_0(p)$ может обладать кратными корнями. Для обоих рассмотренных случаев доказывается, что количество произвольных постоянных, от которых зависит решение уравнения (2), совпадает с порядком этого уравнения.

II. Основные определения

Приведем используемые в данной работе определения - преобразования Лапласа-Бореля и ресургентной функции, как это было сделано, например, в работе [6].

Статья получена 5 июля 2016. Д.С. Кац, аспирант МГУ им. М.В. Ломоносова (e-mail: dmitryxk@gmail.com)

Обозначим через $S_{R,\varepsilon}$ сектор $S_{R,\varepsilon} = \{-\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$. Будем говорить, что аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ функция f имеет не более, чем -экспоненциальный рост в нуле, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство $|f| < Ce^{\alpha/|r|^k}$.

Обозначим через $E(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})$ пространство функций экспоненциального роста на бесконечности, голоморфных в области $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon} = \{r: |\arg r| < \pi/2 + \varepsilon, |r| > R\}$, а через $E(\mathbb{C})$ — пространство целых функций экспоненциального роста на бесконечности. Через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ обозначим пространство функций, голоморфных в $S_{R,\varepsilon}$, k-экспоненциально растущих в нуле.

k-преобразованием Лапласа-Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется

$$B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}}.$$

Известно, что $B_k: E_k(S_{R,\varepsilon}) \to E(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(\mathbb{C})$. Обратное преобразование Лапласа-Бореля определяется следующим образом:

$$B_k^{-1}\tilde{f} = \frac{k}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k} \tilde{f}(p) \mathrm{d}p,$$

где контур $\tilde{\gamma}$ — граница области $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$ (его изображение можно найти, например, на рис. 2 работы [5]). Отметим, что верна формула

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{r} k^{r+1} \frac{d}{dk}\right) f(r) = pB_k f.$$

Определение 1. Функция $\tilde{f}$ называется бесконечно-продолжимой, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек $Z_R \subset \mathbb{C}$, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжима из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньшей, чем R, не проходящего через Z_R.

Определение 2. Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется -ресургентной функцией, если его k-преобразование Лапласа-Бореля бесконечно продолжимо.

III. Уравнения с постоянными коэффициентами оператора

В данном разделе будут построены решения уравнений вида (2) в случае, когда коэффициенты оператора $\widehat{H}$, стоящего в левой части уравнения, являются постоянными. Иными словами, будут построены решения уравнений вида

$$H\left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr}\right) u = 0, \qquad (6)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $u(r)$ — неизвестная ресургентная функция, а $H(p)$ — полином по p.

Будем строить решения с помощью -преобразования Лапласа-Бореля. Применяя его к левой и правой частям уравнения (6) получим:

$$H(p)\tilde{u} = \tilde{f}(p),$$

где $\tilde{u}(p)$ — k-преобразование Лапласа-Бореля функции $u(r)$, а $\tilde{f}(p)$ — произвольная голоморфная функция. Отсюда

$$\tilde{u} = \frac{1}{H(p)} \tilde{f}(p). \qquad (7)$$

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_m$ — корни полинома $H(p)$, а $n_1, n_2, \dots, n_m$ — их кратности. Тогда

$$H(p) = A(p-p_1)^{n_1}(p-p_2)^{n_2} \dots (p-p_m)^{n_m},$$

где A — константа, и имеет место представление

$$\frac{1}{H(p)} = \frac{A_1^1}{(p-p_1)} + \frac{A_2^1}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}^1}{(p-p_1)^{n_1}} + \\ + \frac{A_1^2}{(p-p_2)} + \frac{A_2^2}{(p-p_2)^2} + \dots + \frac{A_{n_2}^2}{(p-p_2)^{n_2}} + \\ + \dots + \\ + \frac{A_1^m}{(p-p_m)} + \frac{A_2^m}{(p-p_m)^2} + \dots + \frac{A_{n_m}^m}{(p-p_m)^{n_m}},$$

где числа A_j^i определяются методом неопределенных коэффициентов.

Также заметим, что $\forall s = \overline{1, m}$ голоморфная функция $\tilde{f}(p)$ представима в виде

$$\tilde{f}(p) = \sum_{j=0}^{n_s - 1} \tilde{f}_j^s (p-p_s)^j + (p-p_s)^{n_s} \tilde{l}_s(p),$$

где $\tilde{f}_j^s$ — константы, а $\tilde{l}_s(p)$ — голоморфная функция.

Подставляя выписанные представления в (7), получим

$$\tilde{u}(p) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{n_s} \frac{A_i^s}{(p-p_s)^i} \left(\sum_{j=0}^{n_s-1} \tilde{f}_j^s (p-p_s)^j + (p - p_s)^{n_s} \tilde{l}_s(p) \right)$$

$$= \sum_{s=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_s-1} A_i^s \tilde{f}_j^s (p-p_s)^{j-i} + \tilde{l}_s^1(p) \right)$$

Ясно, что функции $\tilde{l}_s^1(p)$ также являются голоморфными. Изменим порядок слагаемых и отделим те из них, что являются голоморфными

$$\tilde{u}(r) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{l=-n_s}^{n_s-2} \left(\sum_{j=\max\{0,l+1\}}^{\min\{l+n_s, n_s-1\}} A_{j-l}^s \tilde{f}_j^s \right) (p - p_s)^l + \tilde{l}_s^1(p) \right)$$

$$= \sum_{s=1}^m \left(\sum_{l=-n_s}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n_s+l} A_{j-l}^s \tilde{f}_j^s \right) (p-p_s)^l + \tilde{l}_s^2(p) \right).$$

Здесь $\tilde{l}_s^2(p)$ — голоморфные функции. Еще раз изменив индексацию и объединив функции $\tilde{l}_s^2(p)$, окончательно получим

$$\tilde{u}(p) = \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_s-l} A_{l+j}^s \tilde{f}_j^s \frac{1}{(p-p_s)^l} + \tilde{l}(p).$$

Здесь A_{l+j}^s — константы, зависящие от вида символа оператора H, $\tilde{f}_j^s$ — коэффициенты разложений в ряд Тейлора фунции $\tilde{f}(p)$ в точках p_s, а $\tilde{l}(p)$ — некоторая голоморфная функция.

Применим обратное -преобразование Лапласа-Бореля:

$$u(r) = \sum_{s=1}^m \sum_{l=1}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_s-l} A_{l+j}^s \tilde{f}_j^s B_k^{-1} \left(\frac{1}{(p-p_s)^l} \right).$$

В работе [6] была доказана формула

$$B_k r^\sigma = \frac{1}{k} \Gamma\left(1 - \frac{\sigma}{k}\right) p^{\sigma/k - 1}, \frac{\sigma}{k} = 0, -1, -2, \dots,$$

с помощью которой можно найти обратные -преобразования Лапласа-Бореля функций $(p-p_s)^{-l}$:

$$B_k^{-1} \left(\frac{1}{(p-p_s)^l} \right) = e^{\frac{p_s}{r^k}} \frac{k}{(l-1)!\, r^{k(l-1)}}.$$

Таким образом,

$$u(r) = \sum_{s=1}^{m} e^{\frac{p_s}{r^k}} \sum_{l=1}^{n_s} \left(\sum_{j=0}^{n_s-l} A_{l+j}^s \tilde{f}_j^s \frac{k}{(l-1)!} \right) r^{-k(l-1)}.$$

Заметим, что константы, стоящие при степенях r, а именно

$$\sum_{j=0}^{n_s-l} A_{l+j}^s \tilde{f}_j^s \frac{k}{(l-1)!}$$

зависят от коэффициентов разложений в ряд Тейлора в различных точках одной и той же, однако, выбираемой произвольно голоморфной функции $\tilde{f}(p)$. Возникает вопрос о том, какие значения эти константы могут принимать в зависимости от выбора функции $\tilde{f}(p)$. Можно показать, что они могут быть произвольными: действительно, в том, что функция

$$u(r) = \sum_{s=1}^{m} e^{\frac{p_s}{r^k}} \sum_{l=1}^{n_s} C_{s,l}\, r^{-k(l-1)}$$

удовлетворяет уравнению (6) при любом выборе констант $C_{s,l}$ легко убедиться явной подстановкой.

Таким образом доказана

Теорема 1. Решения уравнения (6) имеют вид

$$u(r) = \sum_{s} e^{\frac{p_s}{r^k}} \sum_{l=1}^{n_s} C_{s,l}\, r^{-k(l-1)},$$

где сумма берется по объединению p_s корней полинома $H(p)$, n_s — кратности этих корней, а $C_{s,l}$ — произвольные константы.

Замечание 1. Количество произвольных постоянных $C_{s,l}$ в решении уравнения (6) совпадает с порядком этого уравнения, причем для каждого корня полинома $H(p)$ количество произвольных постоянных, содержащееся в слагаемом, отвечающем данному корню, равно его кратности.

IV. Уравнения, свободные от кратных корней в основном символе

В данном разделе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения (2) в случае, когда корни полинома $H(0,p)$ являются простыми. Известно (см. [5], [10]), что при выполнении данного условия асимптотические разложения решений имеют вид (3), (4), (5). Коэффициенты α_{k-i}^j, σ_j данных разложений были найдены в работах [4, 5, 10]; рассматривается вопрос вычисления коэффициентов s_j^i.

В цитированных работах коэффициенты α_{k-i}^j, σ_j были выражены через значения полиномов $H_i(p)$ из следующего, получаемого с помощью формулы Тейлора, представления символа оператора H:

$$H(r,p) = H_0(p) + rH_1(p) + \cdots + r^k H_k(p) + r^{k+1} H_{k+1}(r,p).$$

В частности, для вычисления коэффициентов σ_j в случае $k=1$ в [5] была найдена формула

$$-\sigma_j {H_0}'(p_j) + H_1(p_j) = 0, \qquad (8)$$

а в работе [4] было показано, что при $k>1$ коэффициенты α_{k-i}^j, σ_j можно вычислять с помощью систем уравнений

$$\sum_{\substack{q+(k-1)l_1+(k-2)l_2+\\+\cdots+l_{k-1}+kl_k=y}} h_{q,l_1,l_1,\ldots,l_k}^j (\alpha_1^j)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k-1}^j)^{l_{k-1}} \sigma_j^{l_k} = 0, y = \overline{1,k}, \qquad (9)$$

где

$$h_{q,l_1,l_2,\ldots,l_k}^j = (-1)^{l_k} \frac{1^{l_1} \cdot \ldots \cdot (k-1)^{l_{k-1}}}{q!\, k^{l_1+\cdots+l_k}} \cdot \frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1! \ldots l_k!} H_1^{(l_1+\cdots+l_k)}(p_j).$$

Например, при $k=3$, эта система имеет вид

$$\begin{cases} H_1(p_j) + \frac{2}{3}{H_0}'(p_j)\alpha_2^j = 0 \\ H_2(p_j) + \frac{2}{3}{H_1}'(p_j)\alpha_2^j + \frac{1}{3}{H_0}'(p_j)\alpha_1^j \\ +\frac{2}{9}{H_0}''(p_j)\left(\alpha_2^j\right)^2 = 0 \\ H_3(p_j) + \frac{2}{3}{H_2}'(p_j)\alpha_2^j + \frac{1}{3}{H_1}'(p_j)\alpha_1^j - \frac{1}{3}{H_0}'(p_j)\sigma_j \\ +\frac{2}{9}{H_1}''(p_j)\left(\alpha_2^j\right)^2 + \frac{2}{9}{H_0}''(p_j)\alpha_1^j\alpha_2^j \\ +\frac{4}{81}{H_0}'''(p_j)\left(\alpha_2^j\right)^3 = 0. \end{cases}$$

Далее в данном разделе будут найдены формулы для вычисления коэффициентов s_i^j сначала в существенно более простом случае младших ($k=1$) вырождений, а затем и в случае старших ($k>1$) вырождений. Будет рассматриваться член асимптотики (3), соответствующий нулевому корню полинома $H_0(p)$, все остальные случаи легко сводятся к этому заменой $u(r) = \exp{(p_j/r^k)} v(r)$.

A. *Случай младших вырождений*

Рассмотрим уравнения с т.н. младшими вырождениями, т.е. уравнения вида

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) u = 0, \qquad (10)$$

где $\hat{H}$ — линейный дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами. Пусть корни полинома $H_0(p) = H(0,p)$ являются простыми. В работе [5] было показано, что в таком случае ресургентная функция $u(r)$ представима в виде суммы функций $u_j(p)$, соответствующих корням p_j полинома $H_0(p)$ и имеющих асимптотические разложения (4), причем числа σ_j вычисляются по формуле (8).

Найдем коэффициенты s_i^j для случая $p_j = 0$.

Член асимптотики, соответствующий нулевому корню полинома $H_0(p)$ имеет вид

$$r^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} s_i\, r^i, \qquad (11)$$

где $\sigma = H_1(0)/{H_0}'(0)$. Уравнение (10) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^m u = 0, \qquad (12)$$

где $a_m(r)$ — голоморфные коэффициенты дифференциального оператора H. Чтобы найти коэффициенты s_i подставим (11) в (12).

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(r)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^m r^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty} s_i r^i = 0.$$

Проведя дифференцирование и разделив обе части равенства на r^{σ}, получим

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(r)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^m s_i\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(i+\sigma)}r^{i+m} = 0. \qquad (13)$$

Разложим голоморфные функции $a_m(r)$ в ряды Тейлора:

$$a_m(r) = \sum_{q=0}^{\infty} a_m^q r^q. \qquad (14)$$

Подставив (14) в (13) и приведя подобные слагаемые получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\min\{l,n\}}\sum_{i=0}^{l-m}(-1)^m a_m^{l-m-i}\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(i+\sigma)}s_i\right)r^l = 0.$$

Таким образом для коэффициентов s_i получаем систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{\min\{l,n\}}\sum_{i=0}^{l-m}(-1)^m a_m^{l-m-i}\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(i+\sigma)}s_i = 0, \forall l\in\mathbb{N}_0.$$

Поменяем местами суммирования по m и по i. Тогда система уравнений перепишется в виде

$$\sum_{i=0}^{l} c_i^l s_i = 0, \forall l\in\mathbb{N}_0,$$

где

$$c_i^l = \sum_{m=0}^{\min\{l-i,n\}}(-1)^m a_m^{l-m-i}\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(i+\sigma)}.$$

Заметим, что $\forall l\in\mathbb{N}_0$, $c_l^l = a_0^0 = 0$, в силу того, что нуль является корнем полинома $H_0(p)$. Таким образом уравнение, соответствующее $l=0$ выполнено всегда, а остальные имеют вид

$$\sum_{i=0}^{l-1} c_i^l s_i = 0, \forall l\in\mathbb{N}.$$

Заметим также, что $\forall l\in\mathbb{N}$, $c_{l-1}^l = a_0^1 - a_1^0(l+\sigma-1) = -(l-1)a_1^0$, так как $\sigma = H_1(0)/H_0{}'(0) = a_0^1/a_1^0$. В силу этого первое уравнение системы выполнено всегда, а $\forall l>1$, $c_{l-1}^l \neq 0$. Таким образом, для коэффициентов s_i окончательно получаем СЛАУ

$$\begin{bmatrix} c_0^2 & -a_1^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_0^3 & c_1^3 & -2a_1^0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_0^4 & c_1^4 & c_2^4 & -3a_1^0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Из ее вида можно заключить, что один из коэффициентов s_i можно выбрать произвольно, а остальные — однозначно через него выразить. Например, если $s_0 = C$, то

$$s_n = \frac{\begin{vmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & 0 & \dots & 0 & -c_0^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1^{n+1} & c_2^{n+1} & c_3^{n+1} & \dots & c_{n-1}^{n+1} & -c_0^{n+1} \end{vmatrix} C}{n!\,(-a_1^0)^n}.$$

С учетом того, что $a_j^i = H_i^{(j)}(0)/j!$, формулы для c_i^l можно переписать в виде

$$c_i^l = \sum_{m=0}^{\min\{l-i,n\}}(-1)^m\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(i+\sigma)}H_{l-m-i}^{(m)}(0).$$

Таким образом с учетом результатов работы [5] доказана

Теорема 2. Пусть в уравнении (10) порядка n корни полинома $H_0(p)$ являются простыми. Тогда решения этого уравнения имеют вид

$$u(r) = \sum_j u_j(r),$$

где сумма берется по объединению $\{p_j\}$ корней полинома $H_0(p)$, а функции $u_j(r)$ являются обратными преобразованиями Лапласа-Бореля функций, имеющих особенности в точках p_j, и имеют асимптотические разложения

$$u_j(r) = C_j e^{\frac{p_j}{r}} r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} s_i^j r^i,$$

где C_j — произвольные константы, $\sigma_j = H_1(p_j)/H_0{}'(p_j)$, а s_i^j — числовые коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$s_i^j = \frac{\begin{vmatrix} c_1^{2,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0^{2,j} \\ c_1^{3,j} & c_2^{3,j} & 0 & \dots & 0 & -c_0^{3,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1^{i+1,j} & c_2^{i+1,j} & c_3^{i+1,j} & \dots & c_{i-1}^{i+1,j} & -c_0^{i+1,j} \end{vmatrix}}{i!\,(-H_0{}'(p_j))^i},$$

где

$$c_i^{l,j} = \sum_{m=0}^{\min\{l-i,n\}}(-1)^m\frac{\Gamma(i+\sigma+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(i+\sigma)}H_{l-m-i}^{(m)}(p_j).$$

Замечание 2. Каждому простому корню полинома $H_0(p)$ соответствует компонент асимптотики $u_j(r)$, содержащий одну произвольную постоянную. Общее количество произвольных постоянных в решении уравнения (10) совпадает с порядком этого уравнения.

B. Случай старших вырождений

Рассмотрим теперь уравнения со старшими вырождениями, а именно уравнения вида

$$H\left(r, -\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0, \qquad (15)$$

где $\widehat{H}$ — дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами, $k>1$. Как и в предыдущем случае будем требовать простоты корней полинома $H_0(p)$. В работе [10] было показано, что в таком случае ресургентная функция $u(r)$ представима в виде суммы функций $u_j(p)$, соответствующих корням p_j полинома $H_0(p)$ и имеющих асимптотические разложения (5), причем коэффициенты α_i^j и σ_j вычисляются с помощью систем уравнений (9).

Как и раньше будем искать коэффициенты s_i^j для случая $p_j = 0$.

Член асимптотики, соответствующий нулевому корню полинома $H_0(p)$ имеет вид

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_{k-i}}{r^{k-i}}\right)r^{\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}s_i\,r^i, \qquad (16)$$

где α_{k-i} и σ вычисляются с помощью соответствующей системы уравнений.

Уравнение (15) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{n}a_m\,(r)\left(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^m u=0, \qquad (17)$$

где $a_m(r)$ — голоморфные коэффициенты дифференциального оператора $\widehat{H}$.

По индукции легко доказываются

Лемма 1. Дифференциальный оператор

$$(-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr})^m,$$

где $m\in\mathbb{N}$, представим в виде

$$\sum_{j=1}^{m}b_j^m\,r^{km+j}\,\frac{d^j}{dr^j},$$

где числа b_j^m $(m,j\in\mathbb{N},j\le m)$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{cases} b_1^1=-\dfrac{1}{k},\\ b_m^m=-\dfrac{1}{k}b_{m-1}^{m-1}=\left(-\dfrac{1}{k}\right)^m, m\ge 2,\\ b_1^m=-\dfrac{1}{k}(k(m-1)+1)b_1^{m-1}, m\ge 2,\\ b_j^m=-\dfrac{1}{k}(k(m-1)+j)b_j^{m-1}\\ \quad +b_{j-1}^{m-1}, m\ge 2, j=\overline{2,m-1}. \end{cases} \qquad (18)$$

Лемма 2. $\forall n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\frac{d^n}{dr^n}e^{\frac{\alpha}{r^k}}=(-1)^n\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha^j k^j P_{n-j}^n(k)}{r^{jk+n}}\right)e^{\frac{\alpha}{r^k}}, \qquad (19)$$

где $\forall n\in\mathbb{N}, 0\le n-j\le n-1$, $P_{n-j}^n(k)$ — полином по k степени $n-j$, определяемый рекуррентно из следующих условий:

$$\begin{cases} P_0^n(k)\equiv 1,\\ P_{n-1}^n(k)=\dfrac{(k+n-1)!}{k!},\\ P_{n-j}^n(k)=(jk+n-1)P_{n-1-j}^{n-1}(k)\\ +P_{n-j}^{n-1}(k), j=\overline{2,n-1} \end{cases} \qquad (20)$$

При $n=0$ сумму в правой части равенства (19) следует считать по определению равной единице.

Подставив (16) в (17), применив леммы 1 и 2, сократив экспоненты, разложив функции $a_m(r)$ в ряды Тейлора ($a_m(r)=\sum_{q=0}^{\infty}a_m^q\,r^q$) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях r, получим следующую СЛАУ для s_i

$$\sum_{i=0}^{y}c_i^y\,s_i=0,\forall y\in\mathbb{N}_0$$

где

$$c_i^y=\sum_{\substack{q+km-1j_1-2j_2-\dots-(k-1)j_{k-1}=y-i\\ 0\le m\le n,1\le j\le m,0\le q,\\ l_1+\dots+l_k=j,\\ 1\le j_1\le l_1,\dots,1\le j_{k-1}\le l_{k-1}}}(-1)^{j-l_k}\cdot a_m^q b_j^m$$
$$\cdot\frac{j!}{l_1!\cdot\ldots\cdot l_k!}1^{j_1}\cdot\ldots\cdot(k-1)^{j_{k-1}}$$
$$\cdot P_{l_1-j_1}^{l_1}(1)\cdot\ldots\cdot P_{l_{k-1}-j_{k-1}}^{l_{k-1}}(k-1)\cdot\alpha_1^{j_1}\cdot\ldots$$
$$\cdot\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}\cdot(i+\sigma-l_k+1)\cdot\ldots\cdot(i+\sigma-1)$$
$$\cdot(i+\sigma),$$

где ограничения на индексы суммирования вида $1\le j_i\le 0$ следует трактовать следующим образом: в равенстве $i+jk-j_1-2j_2-\dots-(k-1)j_{k-1}=q$ индекс j_i следует считать равным нулю, а все коэффициенты в соответствующем слагаемом, имеющие j_i в качестве индекса или степени следует считать равными единице. Это соответствует тому, что сумму в правой части равенства (19) мы считаем по определению равной единице при $n=0$.

Заметим, что при $i\in\overline{y-k+1,y-1}$, $c_i^y=0$ в силу системы (9), при $i=y$, $c_i^y=a_0^0=0$, так как нуль является корнем полинома $H_0(p)$. Также заметим, что формула для c_{y-k}^y отличается от последнего уравнения системы (9) только слагаемым, содержащим σ. вычитая одно из другого получим $c_{y-k}^y=-(y-k)a_1^0$. Таким образом $c_{y-k}^y=0$ при $y=k$ и $c_{y-k}^y\ne 0,\forall y>k$ ($a_1^0\ne 0$, в силу того, что нуль является простым корнем полинома $H_0(p)$). Таким образом, для коэффициентов s_i окончательно получаем СЛАУ

$$\begin{bmatrix} c_0^{k+1} & -a_1^0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ c_0^{k+2} & c_1^{k+2} & -2a_1^0 & 0 & 0 & \dots\\ c_0^{k+3} & c_1^{k+3} & c_2^{k+3} & -3a_1^0 & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_0\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\end{bmatrix}.$$

Из ее вида можно заключить, что один из коэффициентов s_i можно выбрать произвольно, а остальные — однозначно через него выразить.

С учетом того, что $a_j^i=H_i^{(j)}(0)/j!$, формулы для c_i^l можно переписать в виде

$$c_i^y=\sum_{\substack{q+km-1j_1-2j_2-\dots-(k-1)j_{k-1}=y-i\\ 0\le m\le n,1\le j\le m,0\le q,\\ l_1+\dots+l_k=j,\\ 1\le j_1\le l_1,\dots,1\le j_{k-1}\le l_{k-1}}}(-1)^{j-l_k}b_j^m$$
$$\cdot\frac{j!}{m!\,l_1!\cdot\ldots\cdot l_k!}1^{j_1}\cdot\ldots\cdot(k-1)^{j_{k-1}}$$
$$\cdot P_{l_1-j_1}^{l_1}(1)\cdot\ldots\cdot P_{l_{k-1}-j_{k-1}}^{l_{k-1}}(k-1)\cdot\alpha_1^{j_1}\cdot\ldots$$
$$\cdot\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}\cdot(i+\sigma-l_k+1)\cdot\ldots\cdot(i+\sigma-1)$$
$$\cdot(i+\sigma)H_q^{(m)}(0).$$

Таким образом с учетом результатов работ [10], [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в уравнении (15) порядка n корни полинома $H_0(p)$ являются простыми. Тогда решения этого уравнения имеют вид

$$u(r)=\sum_j u_j\,(r),$$

где сумма берется по объединению $\{p_j\}$ корней полинома $H_0(p)$, а функции $u_j(r)$ являются обратными преобразованиями Лапласа-Бореля функций, имеющих особенности в точках p_j, и имеют асимптотические разложения

$$u_j(r) = C_j \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^j\, r^i,$$

где C_j — произвольные константы, коэффициенты α_i^j и σ_j находятся из систем уравнений (9), а s_i^j — числовые коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$s_i^j = \frac{\begin{vmatrix} c_1^{k+1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0^{k+1,j} \\ c_1^{k+2,j} & c_2^{k+2,j} & 0 & \dots & 0 & -c_0^{k+2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1^{k+i,j} & c_2^{k+i,j} & c_3^{k+i,j} & \dots & c_{i-1}^{k+i,j} & -c_0^{k+i,j} \end{vmatrix}}{i!\,(-H_0{}'(p_j))^i},$$

где

$$c_i^{y,j} = \sum_{\substack{q+km-1j_1-2j_2-\dots-(k-1)j_{k-1}=y-i \\ 0\le m\le n, 1\le l\le m, 0\le q, \\ l_1+\dots+l_k=l, \\ 1\le j_1\le l_1,\dots,1\le j_{k-1}\le l_{k-1}}} (-1)^{l-l_k} b_j^m \cdot \frac{l!}{m!\,l_1!\cdot\ldots\cdot l_k!} 1^{j_1}\cdot\ldots\cdot(k-1)^{j_{k-1}} \cdot P_{l_1-j_1}^{l_1}(1)\cdot\ldots\cdot P_{l_{k-1}-j_{k-1}}^{l_{k-1}}(k-1)\cdot(\alpha_1^j)^{j_1} \cdot\ldots\cdot(\alpha_{k-1}^j)^{j_{k-1}}\cdot(i+\sigma_j-l_k+1)\cdot\ldots\cdot(i+\sigma_j-1)\cdot(i+\sigma_j)H_q^{(m)}(p_j).$$

Числа b_j^m определяются формулами (18), а числа $P_j^l(i)$ — формулами (20).

Замечание 3. Каждому простому корню полинома $H_0(p)$ соответствует компонент асимптотики $u_j(r)$, содержащий одну произвольную постоянную. Общее количество произвольных постоянных в решении уравнения (15) совпадает с порядком этого уравнения.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность М.В. Коровиной за многочисленные обсуждения и помощь при написании данной работы.

Библиография

[1] Л. Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир. 1964. 477 с.

[2] Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Издательство иностранной литературы. 1958. 474 с.

[3] F.W.J. Olver. Asymptotics and Special Functions. New York: Academic Press. 1974. 572 p.

[4] Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов. // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1612-1617.

[5] Коровина М.В., Шаталов В.Е. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ. // Дифференц. уравнения. - 2010. Т. 46. № 9. С. 1259-1277.

[6] Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков. // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. 3. С. 349-357.

[7] J. Ecalle. Les Fonctions Resurgentes, I, II, III. Publications Mathematiques d’Orsay. Paris. 1981–1985.

[8] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений в частных производных со старшими вырождениями и уравнение Лапласа на многообразии с особенностью типа клюва. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 614-624.

[9] Sternin B., Shatalov V. Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis. Boca Raton, FL: CRC Press. 1996. 270 p.

[10] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями. // ДАН. 2011. Т. 437. № 3. С. 302-304.

Series coefficients in asymptotic expansions of solutions to equations with degenerations

Dmitry Kats

***Abstract* — The article considers ordinary differential equations with holomorphic coefficients. Solutions are found to equations with constant coefficients of degenerating operator. This paper also deals with equations with holomorphic coefficients of degenerating operator, principal symbols of which have only simple roots: for such cases coefficients of solutions' asymptotic series are computed. For both cases article shows, that the number of arbitrary constants contained in equation's solution coincides with the order of the equation.**

***Keywords* — asymptotic expansions, singularities, differential equations, resurgent analysis.**