

Критерий полноты для класса планарных предикатных схем

Василевская И.Ю.

В работе исследуется специальный класс дискретных управляющих систем — класс планарных предикатных схем, представляющий собой модификацию модели схем из предикатных элементов, в которой рассматриваются схемы, граф которых является планарным, а входы расположены на внешней грани. По аналогии с моделью СФЭ для полного базиса данной модели формулируется критерий планарной реализуемости и описывается алгоритм преобразования произвольной непланарной предикатной схемы в заданном базисе в планарную предикатную схему.

1 Описание модели

Дадим определение предикатной схемы и ее функционирования по аналогии с [2].

Определение. *Схемой из предикатных элементов* или *предикатной схемой в базисе* Π назовем помеченный неориентированный двудольный граф следующей структуры:

- каждая вершина из первой доли помечена некоторым множеством символов из алфавита X и/или множеством символов из алфавита Y . Алфавит X соответствует *входным* переменным предиката, а Y — его внутренним переменным, т.е. переменным, возникающим непосредственно в процессе вычисления;
- каждая вершина второй доли помечена некоторым символом π_i из множества Π и соединена k ребрами, пронумерованными числами $1, \dots, k$, с вершинами из первой доли.

Вершины из первой доли будем называть узлами схемы, а вершины из второй доли — её предикатными элементами. Узлы схемы, соединенные ребрами с предикатным элементом, будем называть полюсами этого элемента, а узлы, соответствующие входным переменным, — полюсами схемы. При этом считается, что узел является j -м полюсом предикатного элемента и соответствует его j -ой переменной, если соединяющее их ребро имеет номер j . Полюс схемы, которому приписано более одной входной переменной, называется кратным полюсом этой схемы.

Будем считать элементарной такую предикатную схему, которая состоит либо из изолированной полюсной вершины, либо только из одного предикатного элемента π_i , $1 < i < k$, где k — число полюсов указанного элемента.

Функционирование предикатной схемы на конкретном наборе определяется допустимостью состояния схемы на этом наборе. Предикатная схема Σ находится в допустимом состоянии на заданном наборе значений её полюсных переменных тогда и только тогда, когда существует такой набор значений внутренних переменных схемы, на котором все предикатные элементы схемы находятся в допустимых состояниях. Если же указанного набора значений внутренних переменных не существует, то считается, что схема находится в недопустимом состоянии на заданном наборе значений её полюсных переменных.

Предполагается, что предикатная схема Σ реализует предикат π от её полюсных переменных, если множество допустимых наборов π совпадает с множеством тех наборов, на которых Σ находится в допустимом состоянии. При этом схемы будем называть эквивалентными, если они реализуют равные предикаты.

Отметим, что элементарная предикатная схема, состоящая из изолированной полюсной вершины, реализует тождественно истинный предикат. Будем считать также, что тождественно истинный (соответственно тождественно ложный) предикат реализуется любой предикатной схемой без входных полюсов, которая имеет непустое (соответственно пустое) множество допустимых состояний.

В общем случае граф предикатной схемы может содержать несколько компонент связности. В дальнейшем, будем считать, что схема не содержит компонент связности, которые не имеют полюсных узлов и для которых существует хотя бы один допустимый набор, так как такие компоненты не влияют на функционирование схемы.

1.1 Способы описания предикатных схем

Существуют различные способы представления предикатных схем, каждый из которых лучше отражает определенные свойства данной модели. Так, например, предикатные элементы и отдельные взаимосвязи между ними, отображенные в графовой модели, весьма наглядно отражают топологию схемы, в то время как для функционального описания схемы в смысле определения множества допустимых значений всей схемы или отдельных ее подсхем, естественно использовать такой способ описания функционирования предиката, как выражение его области допустимых значений через характеристические функции. Отдельно стоит упомянуть и универсальную модель обобщенных задач выполнимости.

Графовое представление

Нетрудно видеть из общего определения 1 модели, что представление предикатной схемы в виде помеченного неориентированного графа наглядно описывает топологию схемы и взаимосвязи между отдельными подсхемами.

В тех случаях, когда это не вызывает разночтений, не будем различать узел схемы и переменную, символ которой приписан данной вершине, а также предикатный элемент и сам предикат, отвечающий этому элементу. Также, для удобства, в некоторых случаях будем использовать упрощенное описание предикатной схемы, опуская пометки дуг и некоторых внутренних вершин.

Модель характеристических функций

Для представления допустимых наборов значений результирующей схемы или отдельных предикатных элементов, удобно использовать характеристические функции. Так, функционирование предикатного элемента $\pi(x_1, \dots, x_k)$ с k полюсами, задается его характеристической функцией χ_π от k переменных, связанных с указанными полюсами, и определяется тем, что предикатный элемент находится в допустимом состоянии на тех и только тех наборах значений этих переменных, на которых данная функция равна 1.

В дальнейшем, предикат π , зависящий от n переменных, будем обозначать $\pi(x_1, \dots, x_n)$, а $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ будет соответствовать множеству кортежей (наборов значений, множеству истинности) предиката $\pi(x_1, \dots, x_n)$: $\Pi(x_1, \dots, x_n) = \{\alpha | \chi_\pi(\alpha) = 1\}$.

1.2 Операции над предикатными элементами

Определение. Суперпозицией двух предикатных схем, не имеющих общих вершин и пометок, будем называть их объединение с возможным отождествлением группы полюсов этих схем, которое сопровождается приписыванием новой (“объединенной”) вершине либо некоторого подмножества переменных данной группы, либо “новой” внутренней переменной.

Выше были описаны две модели для представления предикатных схем: графовая, удобная для отображения топологии схемы; и характеристических функций, подходящая для работы с множеством допустимых значений отдельных элементов схемы. Далее будут рассмотрены частные случаи операции суперпозиции и их отображение на каждую из моделей.

Отметим, что для описания функционирования предикатных схем в ряде статей ([3], [4], [1]) использовались $(\exists, \&)$ -формулы, а операция суперпозиции двух предикатов π_1 и π_2 соответствовала операции конъюнкции.

Определение. Конъюнкцией $\pi_1(x_1, \dots, x_m)$ и $\pi_2(x_1, \dots, x_n)$ называется такой $(m+n)$ -местный предикат π , что

$$\pi(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = \pi_1(x_1, \dots, x_m) \& \pi_2(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$$

Заметим, что если у предикатов, к которым применяется операция конъюнкции, не будет общих переменных, то множество кортежей Π результирующего предиката π представляет собой декартово произведение множества кортежей предиката π_1 и π_2 соответственно: $\Pi = \Pi_1 \otimes \Pi_2$.

Частными случаями операции суперпозиции являются перечисленные ниже операции.

- Проекция или снятие полюсной переменной схемы

С точки зрения графовой модели, операция проекции предиката $\pi_1(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i заключается в снятии пометки переменной x_i со всех вершин, ранее ею помеченных.

С точки зрения модели характеристических функций, по аналогии с [3], проекцией предиката $\pi_1(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется такой $(n-1)$ -местный предикат π , что: $\pi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (\exists x_i) \pi_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

- Суперпозиция с отождествлением полюсов

С точки зрения графовой модели, в результате суперпозиции предикатов с отождествлением по k переменным, каждая пара отождествляемых вершин заменяется одной, которой приписываются пометки отождествляемых вершин обоих предикатов.

С точки зрения модели характеристических функций, суперпозицией $\pi_1(x_1, \dots, x_m)$ и $\pi_2(y_1, \dots, y_n)$ с отождествлением по первым k переменным называется $(m+n)$ -местный предикат $\pi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = \pi_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \& \pi_2(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$.

Отдельно стоит выделить операцию суперпозиции предикатов с отождествлением не более чем по 2 переменным с ограничением на дальнейшее использование внутренних переменных результирующего предиката: внутренняя переменная может быть использована в последующих операциях суперпозиции тогда и

только тогда, когда это не приведет к реберным пересечениям или перемещению входных переменных предиката на внутреннюю грань. В дальнейшем такую операцию будем называть ограниченной суперпозицией с отождествлением по 2 переменным.

- Отождествление входов схемы

Отождествление входов схемы можно рассматривать как частный случай операции суперпозиции с отождествлением, в которой участвует не пара предикатов $\pi_1(x_1, \dots, x_n)$ и $\pi_2(x_1, \dots, x_m)$, а один предикат $\pi_1(x_1, \dots, x_n)$.

- Подстановка констант $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ вместо первых k переменных

Будем называть предикатами-константами предикаты $\pi_0(x)$ и $\pi_1(x)$, множества определения которых состоят из соответствующей константы: $\Pi_0 = \{(0)\}$, $\Pi_1 = \{(1)\}$.

В таком случае, операцию подстановки констант вместо k переменных предиката $\pi'(x_1, \dots, x_n)$ можно определить как операцию суперпозиции предиката $\pi'(x_1, \dots, x_n)$ и k предикатов $\pi_\sigma(x)$, где $\sigma \in [0, 1]$, и каждый из предикатов-констант отождествляется с предикатом π' по переменной x .

В модели характеристических функций данное преобразование будет выглядеть следующим образом: $\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi'(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$.

- Отрицание переменной

Рассмотрим предикат $\pi_-(x_1, x_2)$, множество определения которого имеет вид $\Pi_- = \{(01), (10)\}$. Тогда операцию отрицания переменной x_i можно представить как суперпозицию исходного предиката и предиката π_- с отождествлением по переменной x_i .

В модели характеристических функций это преобразование будет выглядеть следующим образом: $\pi(x_1, \dots, y, \dots, x_k) = \pi_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \& \pi_-(x_i, x_2)$.

1.3 Полнота

Определение. Система предикатов $B = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ является полной, если, применением операций суперпозиции к предикатам из B , можно получить предикат $\pi(x_1, \dots, x_n)$ с произвольной характеристической функцией $\chi_\pi \in P_2^n$, где P_2^n есть множество всех булевых функций от n переменных.

Определение. ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных сохраняет предикат (x_1, \dots, x_m) от m переменных тогда и только тогда, когда для любых n допустимых наборов $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, $i = \overline{1, n}$ значений переменных предиката π набор значений $(f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n), \dots, f(\alpha_m^1, \dots, \alpha_m^n))$ тоже является допустимым для предиката π .

Определим следующие классы предикатов:

- T_0 – множество всех предикатов, сохраняющих константную ФАЛ 0;
- T_1 – множество всех предикатов, сохраняющих константную ФАЛ 1;
- S – множество всех предикатов, сохраняющих ФАЛ \bar{x} ;
- K – множество всех предикатов, сохраняющих все конъюнкции от двух и более переменных;
- D – множество всех предикатов, сохраняющих все дизъюнкции от двух и более переменных;
- SM – множество всех предикатов, сохраняющих все монотонные самодвойственные ФАЛ;
- SL – множество всех предикатов, сохраняющих все монотонные линейные ФАЛ.

Теорема 1.1 (Критерий полноты для предикатных схем). Система из B предикатов является полной \iff она не лежит целиком ни в одном из 7 предполных классов: $T_0, T_1, SM, SL, S, K, D$. [2]

Определение. Шефферовым базисом будем называть полный базис, состоящий из одного предиката. Сам этот предикат будем называть шефферовым предикатом.

Определение. Будем говорить, что предикат π_1 входит в предикат π_2 , или что предикат π_2 является расширением предиката π_1 , если множество кортежей Π_1 предиката π_1 содержится во множестве кортежей Π_2 предиката π_2 .

Определение. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется существенным для предиката π арности n , если $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ и существует b_1, \dots, b_n такие, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, b_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 1$.

Определение. Предикат арности n называется существенным, если он не может быть представлен в виде конъюнкции предикатов меньшей арности.

Лемма 1.2 Следующие три условия эквивалентны:

1. предикат π является существенным;
2. $\pi \neq \pi_{\neg}(x_1, x_2)$, где $\Pi_{\neg} = \{(01), (10)\}$;
3. для предиката π существует существенный набор. [4]

2 Обоснование планарности

Определение. Предикатная схема, которую можно уложить на плоскости без реберных пересечений таким образом, что полюса предикатов, соответствующие внешним переменным, лежат на внешней границе, называется планарной.

Определение. Базис называется планарным, если в нем можно реализовать любой предикат планарной схемой.

Определение. Операции над предикатной схемой, сохраняющие планарность схемы, будем называть операциями планарной суперпозиции.

Лемма 2.1 Ограниченная суперпозиция с отождествлением по двум переменным, проекция, подстановка констант, отождествление входов и отрицание переменной являются операциями планарной суперпозиции.

Доказательство. Из определения операций над предикатами в §1.2 следует, что операция проекции, операция подстановки констант вместо k переменных, отождествления входов и отрицания переменной не меняют планарность схемы. Действительно, при операции проекции, граф предикатной схемы остается неизменным; при операции отождествления входов количество вершин-переменных уменьшается на 1, число же ребер остается прежним, однако появляется дуга от предикатного элемента до отождествляемого входа; в случае подстановки констант добавляется k вершин, соответствующих предикатным элементам и k ребер, что не может добавить к графу схемы даже новых циклов; отрицание переменной добавляет к графу простую цепь.

Ограниченная суперпозиция с отождествлением по 2 переменным не влияет на планарность в силу наложенных на нее ограничений, \square .

Покажем, что, применяя к предикатам π_S, π_K, π_D только следующие операции планарной суперпозиции – проекцию, суперпозиции с отождествлением не более чем по 2 переменным и отождествления входов, можно получить предикаты-константы $\pi_0(x_1), \Pi_0 = \{(0)\}$ и $\pi_1(x_1), \Pi_1 = \{(1)\}$ и предикат-отрицание $\pi_{\neg}(x_1, x_2), \Pi_{\neg} = \{(01), (10)\}$.

2.1 Получение констант

Лемма 2.2 Из предиката $\pi_S \notin S$, где S – класс предикатов, сохраняющих \bar{x} , применением операции отождествления входов и подстановки констант, можно получить планарную реализацию предикатов-констант $\pi_0(x), \pi_1(x)$.

Доказательство. Так как $\pi_S \notin S$, то в Π_S существуют такой набор α_1 , что его отрицание не принадлежит множеству определения предиката: $\exists \alpha_1 \in \Pi_S, \bar{\alpha}_1 \notin \Pi_S$. Применяя операцию отождествления входов к тем переменным, которые равны σ на наборе α , получаем один из предикатов-констант $\pi_{\sigma}(x)$.

Если $\sigma = 0$, то рассмотрим предикат $\pi_{T_0}(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$. Очевидно, что этот предикат не содержит нулевой набор. Проецируем по $(n - 2)$ переменным таким образом, чтобы $\pi'(x_1, x_2) = \exists x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}} \pi_{T_0}(x_1, x_2, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}})$ имел в качестве множества наборов $\Pi' = (01)$ или всевозможные расширения, не содержащие набор (00) . Далее, подставляя вместо одной из переменных 0, получаем предикат $\pi_1(x)$, \square .

В случае константы 1, поступаем аналогично. Заметим, что при получении константы использовались только операции планарной суперпозиции, следовательно, результирующие предикаты-константы планарны, \square .

2.2 Получение отрицания

Лемма 2.3 Пусть даны предикаты $\pi_K \notin K, \pi_D \notin D$, где $K(D)$ – класс предикатов, сохраняющих конъюнкцию (дизъюнкцию) двух и более переменных. Тогда, применением операций подстановки констант и проекции к предикатам π_K, π_D , можно получить планарную реализацию предиката π_{\neg} .

Доказательство. Вначале проведем доказательство для случая, когда оба предиката, π_K и π_D зависят от 2 переменных.

Так как $\pi_K \notin K$, то найдутся такие наборы α_1 и α_2 из области определения предиката π_K , что $\alpha_1 \& \alpha_2 = \beta, \beta \notin \Pi$, причем эти наборы должны отличаться как минимум по двум переменным x_i, x_j . Значит, либо предикат $\pi_K(x_1, x_2)$ будет являться искомым предикатом π_{\neg} , либо его множество допустимых значений будет иметь вид $\Pi_K = \{(01), (10), (11)\}$. Проводя аналогичные рассуждения для π_D , получим, что либо $\pi_D(y_1, y_2) = \pi_{\neg}$, либо $\Pi_D = \{(00), (01), (10)\}$. Тогда, производя операцию ограниченной суперпозиции с отождествлением по переменным $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, получаем предикат π_{\neg} .

Пусть теперь один из предикатов зависит более чем от 2 переменных. Без ограничения общности, будем считать, что это π_K . Так как $\pi_K \notin K$, то найдутся такие наборы α_1 и α_2 из области определения предиката π_K , что $\alpha_1 \& \alpha_2 = \beta, \beta \notin \Pi$, причем эти наборы должны отличаться как минимум по двум переменным x_i, x_j . Выделим из множества переменных предиката подмножество $M = \{x_i | t \neq i, t \neq j, \alpha_{1_t} \neq \alpha_{2_t}\}$ и подмножество $N = X \setminus \{M \cup \{x_i, x_j\}\}$. Во множество M входят переменные, соответствующие противоположным значениям координат наборов α_1 и α_2 . Произведя операцию проекции по этим переменным, а затем подставив соответствующие константы вместо переменных из N , получим предикат π_{\neg} . Заметим, что при получении константы использовались только операции планарной суперпозиции, следовательно, результирующие предикаты-константы планарны, \square .

Из лемм 2.1, 2.2 и 2.3 вытекает важное следствие:

Следствие 2.4 Если B – полный предикатный базис по критерию полноты для предикатных схем 1.1, то к предикатам из B допустимо применение полного набора операций планарной суперпозиции, включая отрицание переменной и подстановку констант.

2.3 Основные утверждения

2.4 Планарные базисы

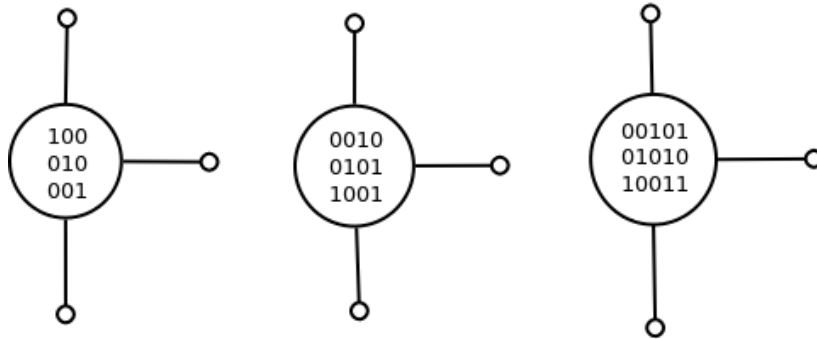


Рис. 1: Шефферовы предикаты от 3 переменных

Определение. Минимальным предикатом $\pi_{min}(x_1, \dots, x_n) \notin P$, где P – один из предполных классов, будем называть такой предикат π , что $\forall i : \pi'(x_1, \dots, x_{n-1}) = \exists x_i \pi_{min}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \implies \pi' \in P$. Т.е. любой предикат, полученный из π_{min} проекцией по одной из переменных предиката, принадлежит P .

Определение. Рассмотрим предикат π , множество кортежей которого имеет вид

$$\begin{aligned} &(\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \\ &(\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \\ &\dots \\ &(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}, \alpha) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что π – существенный предикат, а $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha})$ – существенный набор. В дальнейшем, предикаты, множество кортежей которых обладает такой структурой, будем называть симметричными предикатами порядка n и обозначать π_{symm}^n . Нетрудно видеть, что существенный предикат является расширением симметричного предиката, а характеристическая функция π_{symm}^n представляет собой симметрическую функцию с рабочим числом 1 или $(n - 1)$.

Лемма 2.5 *Существует алгоритм преобразования непланарной предикатной схемы Σ в базисе $B = \{\pi_{symm}^3\}$ в планарную предикатную схему Σ' в базисе B .*

Доказательство. Так как в базисе $B = \{\pi_{symm}^3\}$ предикат π_{linear} , с множеством допустимых наборов $\Pi_{linear} = \{(001), (010), (100), (111)\}$, можно реализовать планарной схемой (см. рис. 2, где вместо $+$ используется операция отрицания суммы по модулю 2 (\oplus)), то, замещая каждое реберное пересечение исходной схемы на 3 предиката π_{linear} по алгоритму на рис. 3, получаем планарную реализацию требуемого предиката в базисе B , \square .

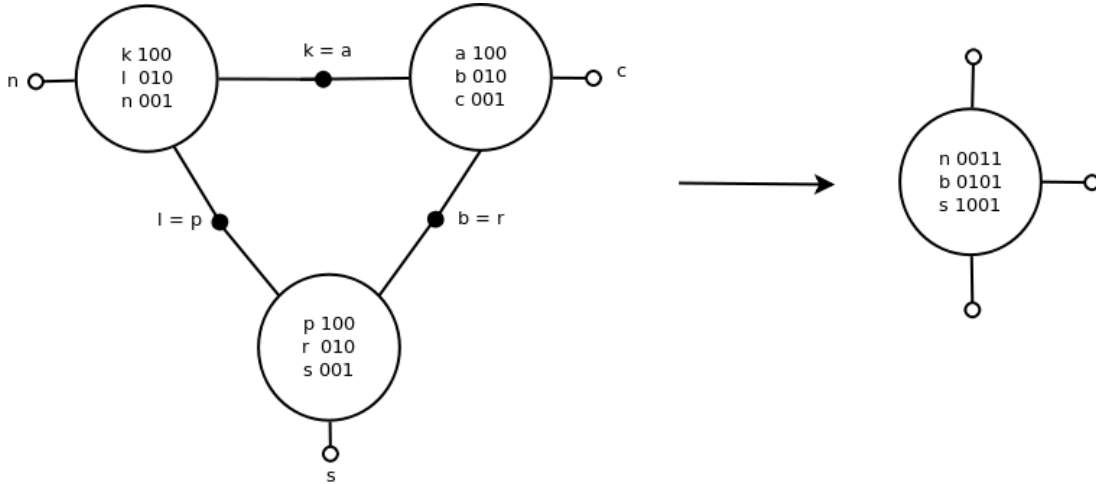


Рис. 2: Реализация π_{linear} в базисе $B = \{\pi_{symm}^3\}$

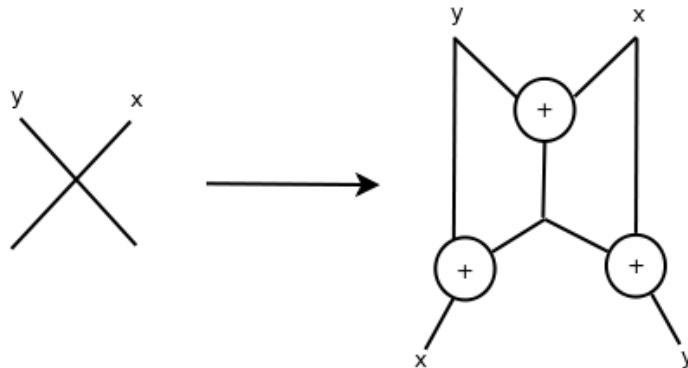


Рис. 3: Получение планарной схемы

Лемма 2.6 *Если $\pi \notin SM$, где SM – класс предикатов, сохраняющих все монотонные самодвойственные функции, то, применяя операции проекции и отрицания переменных, можно получить $\pi_{min} \notin SM$, причем π_{min} будет являться расширением симметричного предиката.*

Доказательство. Рассмотрим $\pi_{min} \notin SM$. Пусть $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ – набор, полученный в результате применения какой-то несамодвойственной функции, которую предикат не сохраняет. Ясно, что $\tilde{\beta} \notin \Pi_{min}$, т.е. $\tilde{\beta} \neq \forall \tilde{\alpha} \in \Pi_{min}$. Однако, для соблюдения условия минимальности предиката, а именно присутствия свойства принадлежности классу SM , всеми предикатами, полученными из π_{min} проекцией по какой-либо переменной, Π_{min} должно содержать наборы $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k), (\beta_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \beta_k), \dots, (\beta_1, \beta_2, \dots, \tilde{\beta}_k)$.

Нетрудно видеть, что набор $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_k)$ – существенный для π_{min} .

Так как класс SM замкнут относительно операции отрицания переменной, применяя эту операцию к π_{min} можно получить π'_{min} , такой, что набор $(\sigma, \sigma, \dots, \sigma)$ является для него существенным, а сам π'_{min} является расширением симметричного предиката, \square .

Следствие 2.7 Из любого несамодвойственного предиката $\pi \notin SM$, применением операций планарной суперпозиции можно получить минимальный предикат $\pi_{min} \notin SM$, который будет являться существенным предикатом с существенным набором $\alpha = (\sigma, \sigma, \dots, \sigma), \sigma \in \{0, 1\}$.

Лемма 2.8 Пусть $\pi \notin SM$, π – расширение симметричного предиката π_{symm}^3 . Тогда, применяя операции планарной суперпозиции, можно получить планарную реализацию π_{linear} .

Доказательство. По условию, $\Pi = \Pi_{symm}^3 \cup A$, где $A \subseteq \{(\alpha\bar{\alpha}\alpha), (\alpha\alpha\bar{\alpha}), (\bar{\alpha}\alpha\alpha), (\alpha\alpha\alpha)\}$.

Заметим, что во всех наборах из A от 2 до 3 координат равны α , и $|A| = k, 1 \leq k \leq 4$. Рассмотрим предикат $\pi_1(y_1, y_2)$ с множеством наборов $\Pi_1 = \{(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}), (\bar{\alpha}, \alpha), (\alpha, \bar{\alpha})\}$.

Применяя операцию суперпозиции с отождествлением по 2 переменным $x_{i_1} = y_1, x_{i_2} = y_2$ исходного предиката $\pi(x_1, x_2, x_3)$ и предиката $\pi_1(y_1, y_2)$, где $i_1 \neq i_2 \neq j$,

$$j = \begin{cases} t & \text{если } \exists \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in A, \beta_t = \bar{\alpha} \\ \forall t \in [1, 3] & \text{если } A = \{(\alpha, \alpha, \alpha)\} \end{cases}$$

не более чем k раз, можно убрать “лишние” наборы и получить симметричный предикат.

Остается получить предикат $\pi_1(x_1, x_2)$. Если $\pi_1(x_1, x_2)$ не получается из $\pi(x_1, x_2, x_3)$ проекцией по какой-либо переменной, то рассмотрим 2 случая.

1. Пусть $A \neq \{(\alpha, \alpha, \alpha)\}$. Тогда $\exists \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in A, \beta_t = \bar{\alpha}$. Подставив на место t -ой переменной предиката π константу $\bar{\alpha}$, и спроецировав по переменной t получим: предикат $\pi'_1(x_1, x_2)$ с множеством кортежей $\Pi'_1 = \{(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}), (\alpha, \bar{\alpha}), (\alpha, \alpha)\}$, из которого искомым предикат π_1 получается применением операции отрицания 2 переменных.

В базе из симметричного предиката π_{symm}^3 предикат π_{linear} получается известным образом по лемме 2.5.

2. Пусть $A = \{(\alpha, \alpha, \alpha)\}$. Тогда $\pi = \pi_{linear}$, \square .

Следующие две леммы показывают как, применяя операции планарной суперпозиции, от симметричного предиката размерности n или его расширения, перейти к симметричному предикату размерности $(n - 1)$ или его расширению.

Лемма 2.9 Если $\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi_{symm}^n, n > 3$, то, применяя операции подстановки констант и проекции, можно получить планарную реализацию π_{symm}^{n-1} .

Доказательство. Так как $\pi \notin SM$, то у предиката π есть существенный набор $\tilde{\alpha} = (\sigma, \dots, \sigma)$. Тогда, производя операцию подстановки константы σ вместо одной из переменных предиката, и последующую операцию проекции, получаем предикат $\pi_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = \pi_{symm}^{n-1}$, \square

Лемма 2.10 Если $\pi(x_1, \dots, x_n) \notin SM, n > 3$, то, применяя операции подстановки констант, отрицание переменных и проекции, можно получить планарную реализацию $\pi_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \notin SM$, \square .

Доказательство. По следствию 2.7, применением операций планарной суперпозиции над π , можно получить $\pi_{min} \notin SM$ с существенным набором $\alpha = (\sigma, \dots, \sigma) \notin \Pi_{min}$. Далее, подставляя константу σ вместо одной из переменных предиката π_{min} и производя операцию проекции по этой переменной, получаем предикат π_1 , который не принадлежит SM , и зависит от $(n - 1)$ переменной, \square .

3 Алгоритм планарного сведения

Теорема 3.1 Пусть дана непланарная предикатная схема Σ в полном предикатном базисе B , максимальная арность элементов которого равна 3. Тогда из Σ , применением операций планарной суперпозиции, можно получить схему Σ' , реализующую тот же предикат, что и Σ , но являющуюся планарной.

Доказательство. Приведем конструктивный алгоритм преобразования исходной схемы.

Вначале получаем планарную реализацию предикатов π_0, π_1 и π_{-} по леммам 2.2 и 2.3. Их наличие, по лемме 2.4, делает доступным весь набор операций планарной суперпозиции.

Далее заменяем каждое реберное пересечение по лемме 2.5.

Полученная в результате вышеописанных преобразований схема является планарной, \square .

Теорема 3.2 Пусть дана непланарная предикатная схема Σ в полном предикатном базисе B . Тогда из Σ , применением операций планарной суперпозиции, можно получить схему Σ' , реализующую тот же предикат, что и Σ , но являющуюся планарной.

Доказательство. Предикаты π_0, π_1, π_{\neg} получаем аналогично доказательству теоремы 3.1.

Выделяем из базиса B $\pi(x_1, \dots, x_n) \notin SM$. По леммам 2.9 и 2.10, применяя операции планарной суперпозиции к предикату $\pi(x_1, \dots, x_n)$, можно получить предикат $\pi'(x_1, x_2, x_3)$, являющийся либо симметричным предикатом от 3 переменных, либо его расширением.

Далее, по лемме 2.8 из предиката π' получаем π_{linear} и преобразовываем схему в планарную по лемме 2.5, \square .

Из теоремы 3.2 следует критерий полноты для модели планарных предикатных схем.

3.1 Критерий полноты

Теорема 3.3 (Критерий полноты для планарных предикатных схем) Система из B предикатов является полной в классе планарных предикатных схем \iff она не лежит целиком ни в одном из 7 предполных классов: $T_0, T_1, SM, SL, S, K, D$.

Таким образом, критерий полноты для модели планарных предикатных схем совпадает с критерием полноты для обычной модели.

Список литературы

- [1] М. С. Шуплецов, “Оценки высокой степени точности для сложности предикатных схем в некоторых базисах”, *Физико-математические науки*, Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **151**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 173–184.
- [2] Методы синтеза и оценки сложности схем, построенных из элементов предикатного типа : диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук : 01.01.09 / Шуплецов Михаил Сергеевич; [Место защиты: Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова] - Москва, 2011 - Количество страниц: 114 с.
- [3] Марченков С. С. Предполнота замкнутых классов в P_k : предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. Физматлит, 1996. С. 117–132.
- [4] Д.Н. Жук. Решетка замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики. Издательство МГУ Москва, 2011