# Математическая модель итерационного метода эволюционного согласования решений

Р.О. Мирахмедов

*Аннотация*—**Обсуждаются недостатки существующих методов принятия решений группами экспертов и делается вывод в пользу метода эволюционного согласования решений. Приводятся принципы, на которых основывается этот метод, приводятся определения, терминология и процедуры. Даны постановка задачи, предельные и начальные значения исходных величин. Построена математическая модель итерационного метода эволюционного согласования решений. Представлены результаты теоретического рассмотрения метода эволюционного согласования решений группой акторов. Найдены зависимости вероятностей правильных и ошибочных решений локальных задач от креативных характеристик акторов, от трудностей задач, от числа акторов и от числа итераций. Метод основан на положениях теории метасистемных переходов В.Турчина с использованием правил взаимодействия между акторами. Правила сформулированы на основах этой теории в соответствиями с операторами генетических алгоритмов, которые выступают в роли координатора в процессе работы группы акторов. На стадиях генерации решений и их экспертизы используется троичная логика. Акторы в процессе групповой работы могут давать правильные ответы, ошибочные ответы и ответы «не знаю». Для построения математической модели использованы положения теории вероятности, однопараметрическая модель Раша, модифицированная для нового метода и теорема Кондорсе о жюри присяжных. Проведено сравнение результатов использования математической модели и компьютерных расчетов по методу Монте-Карло. Сделаны выводы о прогностических возможностях предложенной модели.**

*Ключевые слова*— **генетические алгоритмы, модель Раша, теорема Кондорсе, правила взаимодействия, эволюционное согласование решений, группа акторов, математическая модель.**

## I. Введение

В настоящее время наблюдается тенденция к разработкам и созданию различных систем искусственного и коллективного интеллекта, основанных на природоподобных принципах [1-5].

Главным преимуществом таких систем, помимо простоты их создания, является присущая им выработанная на путях длительной эволюции способность к оптимальному принятию решений с малой долей ошибок как в обычных, так и в экстремальных ситуациях.

Известно, что существующие и предшествующие им системы принятия решений, созданные на основе разработанных людьми принципов и постоянно улучшаемые в соответствии с развивающимися теориями, оказываются недостаточно эффективными в сложных сценариях [6,7]. Этот недостаток, вероятно, связан с особенностями человеческого мышления, и нам не удается строить собственные оригинальные системы принятия решений, обладающие как угодно малыми величинами вероятностей ошибочных решений. С другой стороны, существующие коллективные системы принятия решений недостаточно эффективны из-за фактического отсутствия теории таких систем. Только в последнее время стали появляться теоретические работы, позволяющие строить эффективные системы коллективного принятия решений, основывающиеся на использовании метода эволюционного согласования (МЭС) [8 - 10].

Особенно это актуально для систем с коллективным взаимодействием акторов – носителей как естественного, так и искусственного интеллекта. В отличие от индивидуального интеллекта, который в сложных сценариях может принимать ошибочные решения, коллективное принятие решений при условии правильной организации процедуры, может существенно снизить вероятность ошибок [11,12]. Чтобы разобраться, как это можно сделать, рассмотрим далее метод эволюционного согласования решений и построим для него математическую модель.

## II. Метод эволюционного согласования решений

Методологически теория систем коллективного интеллекта, базирующаяся на методе эволюционного согласования решений [13,14], основывается на следующих принципах:

1. Используется теория метасистемных переходов В. Турчина [15] в части формулирования правил взаимодействия между акторами, позволяющими

Статья получена 20 марта 2024 г. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2023–0005.

Р.О. Мирахмевов – аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (mirakhmedov@gmail.com)

организовать их бесконфликтную многостадийную работу.

2. Взаимодействие между членами группы осуществляется по правилам, взятым из генетических алгоритмов, что способствует получению консолидированного результата уже после нескольких итераций эволюционного согласования.

3. Для получения консолидированного решения группы акторов используются как способности акторов к генерации вариантов решений, так и их способности к экспертизе чужих решений, что существенно повышает вероятность правильных решений в группе.

4. При генерации и согласовании решений используется троичная логика, когда акторам разрешается на часть проекта, вызывающую у них затруднения, давать ответ «не знаю», уменьшая тем самым долю ошибочных решений, циркулирующих в системе.

5. Для оценивания и прогнозирования качества решений используется модифицированная на использование троичной логики однопараметрическая модель Раша [16], позволяющая оценивать вероятности получения правильных и ошибочных ответов исходя из подготовленности акторов к решению данного класса задач.

6. Используются математический аппарат теоремы Кондорсе о жюри присяжных [17], позволяющий рассчитывать вероятности правильного или ошибочного ответа в группе акторов.

Основными методами исследования таких систем выступают математическое и компьютерное моделирование, поскольку они устраняют необходимость в дорогостоящем оборудовании и сокращают время испытаний.

В настоящей работе использована терминология, предложенная в [8], и здесь приведена часть определений, необходимых для лальнейшего изложения:

*Актор* (лат. actor - деятель) - индивид, общественная группа, институт, интеллектуальный агент, программа или другой субъект, осуществляющий конкретные действия в рамках своей роли. В системах коллективного интеллекта актор может выступать в двух ролях – генерировать текст, являющийся решением какого-либо проекта или его части, либо оценивать чужие решения на их правильность. Одиночный актор определяется как актор нулевого ранга.

*Групповой актор i-го ранга* – группа, объединяющая несколько акторов *i-1* ранга, групповой актор 1-го ранга далее называется просто групповым актором;

В настоящей работе используются акторы первого и второго ранга.

*Коллективный интеллект* – способность группы акторов находить решения задач более эффективные, чем лучшее индивидуальное решение в этой группе. Эта способность зависит как от способностей отдельных акторов, входящих в группу, так и от правил или процедуры взаимодействия акторов в процессе работы над проектом.

*Слот* – отдельная часть проекта. Слот имеет самостоятельное значение в рамках проекта и частично удовлетворяет цели проекта. При работе над проектом слот может иметь правильное или ошибочное заполнение, либо остаться незаполненным (ответ – «не знаю»).

*Задача* – в узком смысле этого слова – вопрос из тестовой базы с известными жюри ответами, но неизвестными актору и предлагаемому ему для ответа. В широком смысле задача – проблема, проект локального уровня и т.п. с неизвестным для акторов решением, удовлетворяющий поставленной цели, которое надо найти.

*МЭС* – процедура заполнения слотов проекта групповым актором в соответствии с правилами взаимодействия, взятых из генетических алгоритмов. На стадии генерации решений акторы, исходя из своих способностей, заполняют слоты проекта, либо оставляют некоторые из них незаполненными [8]. Существует две разновидности МЭС. В первой разновидности на нескольких последовательных стадиях согласования акторы получают чужие варианты и заполняют слоты, которые они не заполнили на стадии генерации или на предыдущих стадиях согласования. Во второй разновидности метода акторы делают только одну стадию согласования. Они получают по каждому слоту список чужих решений и заполняют ими свои незаполненные слоты.

*Цех* – совокупность всех акторов разной подготовленности, имеющих знания в конкретной области.

*Знания цеха* – совокупность знаний акторов, совпадающих у большинства, и знаний, относящихся к специфике цеха, зафиксированных в различных источниках, считающихся истинными на данный момент времени.

Одной из основ, на которой строится теория систем эволюционного согласования решений (СЭСР) является модель Раша, связывающая подготовленности и трудности решения задач в рамках единой модели [16].

Считается, что актор характеризуется при работе над проектом со слотами одинаковой степени трудности четырьмя параметрами:

$G_R$ - вероятность заполнения слота правильным ответом.

Вероятность $G_R$ может быть определена двумя способами. Первый способ заключается в том, что если актор на большой выборке тестовых вопросов одинаковой трудности из $N$ вопросов в среднем отвечает правильно на $N_R$, то $G_R = N_R/N$. Второй способ заключается в том, что если $M_R$ из $M$ акторов одинаковой подготовленности в среднем отвечают правильно на вопрос теста, то $G_R = M_R/M$.

$G_N$ - вероятность заполнения слота ошибочным ответом,

$E_R$ - вероятность правильного оценивания слота,

$E_N$ - вероятность ошибочного оценивания слота.

С этими параметрами актора связаны четыре вспомогательных параметра:

$G_S = G_R + G_N$ - вероятность заполнения слота на стадии генерации решений,

$G_V = 1 - G_S$ - вероятность ответа «не знаю» на этой стадии,

$E_S = E_R + E_N$ - вероятность того, что слот будет заполнен при оценивании,

$E_V = 1 - E_S$ - вероятность того, что слот не будет заполнен при оценивании.

Введено понятие идеального актора, имеющее вспомогательный характер и используемое для формулирования утверждений и выводов теории.

Идеальный актор – гипотетический актор, у которого $G_S = G_R$, $G_N = 0$ и $E_R = 1$.

Связь между уровнем трудности тестовых вопросов и степенью подготовленности акторов при определении вероятности правильного ответа была установлена в наиболее общей теории конструирования тестов, опирающейся на теорию измерения, – Item Response Theory (IRT). Для наших целей подходящей является однопараметрическая модель Раша, как наиболее простая модель, связывающая вероятность получения правильного ответа $G_R$ испытуемого с уровнем его подготовленности $\theta_{GR}$ и трудности задания $\beta$.

Вероятность $G_R$ правильного заполнения слота трудности $\beta$ определяется по формуле:

$$G_R = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{GR}}}. \quad (1)$$

Модель Раша в тестологии обеспечивает независимость измерений испытуемого от трудности задания.

Для определения зависимости вероятности ошибочного решения от трудности задания вначале определим по модели Раша зависимость вероятности заполнения слота актором:

$$G_S = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{GS}}}, \quad (2)$$

где $\theta_{GS}$ – подготовленность актора к заполнению слотов как правильными, так и ошибочными ответами.

Вероятность принятия ошибочного решения актором составит при этом

$$G_N = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{GS}}} - \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{GR}}}. \quad (3)$$

Аналогичные выражения получаются и для вероятностей правильной и ошибочной экспертизы:

$$E_R = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{ER}}}, \quad E_S = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{ES}}},$$
$$E_N = \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{ES}}} - \frac{1}{1+e^{\beta-\theta_{ER}}}. \quad (4)$$

Склонность актора к генерации ошибочного ответа характеризуется величиной $\delta_G = \theta_{GS} - \theta_{GR}$, а склонность актора к ошибочной экспертизе — величиной $\delta_E = \theta_{ES} - \theta_{ER}$. У идеального актора эти величины считаются равными нулю.

## III. Построение математической модели

*Постановка задачи.*

Группе акторов необходимо, используя первую разновидность МЭС, найти консолидированное решение проекта, состоящего из некоторого количества слотов, каждый из которых содержит формулировку своей подзадачи и поле для записи ответа. Координация работы акторов осуществляется правилами взаимодействия, основанными на ГА [18]. Правила взаимодействия сформулированы следующим образом:

1) Каждый актор из группы в $M$ акторов в соответствии со своими знаниями и умениями заполняет ответами слоты проекта, оставляя слоты, на которые он не смог найти ответ, незаполненными. Правильный ответ дается актором с вероятностью $G_R$, с вероятностью $G_N$он ошибается и дает неправильный ответ, а с вероятностью G_V=1-G_R-G_N слот остается незаполненным.
2) Актор получает L чужих вариантов и вносит в незаполненные поля своих слотов те ответы, которые он считает правильными. Чужой ответ может быть как истинным, так и ложным. С вероятностью $E_R$ актор определяет, истинен ли ответ, или ложен. В первом случае он заполняет им свой незаполненный слот, во втором случае слот остается незаполненным. С вероятностью $E_N$ он ошибается и, принимая ложный ответ за истинный, заполняет им свой слот. С вероятностью $E_V = 1 - E_R - E_N$ актор не может определить истинность ответа, и слот остается незаполненным.
3) Акторы обмениваются обновленными вариантами и дополняют свои варианты в T итерациях согласования до тех пор, пока не закончится время, отведенное на проект или пока они не получат по каждому слоту более половины одинаковых решений. Эти согласованные решения и являются консолидированным ответом группы.

Считается, что правильный ответ может быть только один, неправильных же ответов может быть несколько.

Необходимо найти вероятность $Q_R$ правильного решения проекта групповым актором в зависимости от параметров модели, то есть найти математическую модель МЭС первой разновидности:

$$Q_R = \varphi(M, L, G_R, G_N, E_R, E_N, T) \quad (5)$$

Вероятность $Q_R$ определяется как среднее отношение числа заполненных правильными ответами слотов более чем половиной акторов к общему числу слотов проекта.

Частично поставленная задача по составлению математической модели итерационного метода эволюционного согласования решений [6] в случае идеального актора и использовании двоичной логики решена в [8]. В настоящей работе рассматривается создание полной математической модели зависимости вероятности правильного ответа группы из $M$ реальных акторов в зависимости от величин, приведенных в (5). В настоящей работе частично применен математический аппарат, приведенный в цитируемой выше работе. Определенную трудность для адаптации этой работы к создаваемой полной модели представляет переосмысление еще не устоявшейся на момент выхода статьи в 2011 году терминологии теории систем коллективного интеллекта на базе итерационного МЭС.

*Оценка предельных и начальных значений.*

Оценим возможное предельное значение $Q_S$ относительной заполненности слотов, равной отношению количества заполненных слотов к общему числу слотов группой акторов при $T \to \infty$. Так как отношение количества незаполненных слотов к полному количеству слотов проекта равное $1 - Q_s$ пропорционально произведению вероятностей незаполнения слотов $1 - G_S$, где $G_S = G_R + G_N$, то

$$Q_s = 1 - (1 - G_S)^M.$$

Аналогично, возможное предельное значение относительной заполненности слотов $Q_h$ правильными ответами равно:

$$Q_h = 1 - (1 - G_R)^M$$

Вероятность $Q_R$ измеряется как отношение числа заполненных правильными ответами слотов более чем половиной акторов к общему числу слотов проекта.

Считается, что все виды неправильных ответов равновероятны. Все слоты обладают одинаковой сложностью, а все акторы обладают одинаковыми способностями, описываемыми вероятностями $G_R, G_N, E_R, E_N$. Учет зависимости этих характеристик акторов от трудности слотов, а также влияния трудности слотов на консолидированный результат работы группы приведен ниже.

Для получения величины относительной заполненности слотов правильными ответами $Q_0$ группой из $M$ акторов на этапе генерации решений (*T=0*) используется формула Кондорсе [19]. Считается, что при *T=0* акторы заполнили слоты, но еще не обменивались вариантами. Если по слоту получено более половины одинаковых ответов, то он считается ответом группы, иначе считается, что группа по этому слоту дала ответ «не знаю».

$$Q_0 = \sum_{i=0}^{\frac{M-1}{2}} C_M^i G_R^{M-i}(1 - G_R)^i.$$

*Математическая модель*

Для получения зависимости $Q_R$ от параметров модели определим приращение величины заполнения слотов актором на итерации *T+1*, исходя из заполнения слотов на итерации *T* при *L=1* для заданных величин $E_R$ и $E_N$. Введем величину отношения числа правильно заполненных слотов на итерации *T* к полному числу слотов *N* одним актором и обозначим ее *P(T)*. Начальное значение $P(0) = G_R$. Введем также величину отношения числа неправильно заполненных слотов к полному числу слотов *N* и обозначим ее *R(T)*.

Начальное значение $R(0) = G_N$. Введем также величину относительного заполнения слотов W(T)=*P(T)*+*R(T)*.

Для получения выражений для *P(T)* и *R(T)* рассмотрим вначале случай идеального актора и для понимания и целостности изложения материала воспользуемся выкладками, приведенными в [20] с учетом обновленной терминологии и обозначений. В случае идеального актора *W(T)=P(T)*, $G_S = G_R$. Примем, что относительная величина оценивания слота $E = E_R$. На рис. 1 приведен этот случай. Черным цветом изображены заполненные слоты, белым – незаполненные. Далее для краткости написания формул примем *W* = *W(T)*.

Допустим, что на итерации *T* *i*-й актор имеет заполнение слотов $W_i$, *j*-й актор - $W_j$ и

*k*–й актор - $W_k$, а заполнение слотов при $T \to \infty$ составляет $Q_S$. Тогда приращение $W_{ij}$ у *i*-го актора при оценивании им варианта *j*-го актора составит величину

$$W_0 = \frac{Q_S - W_i}{Q_S} W_j E \qquad (6)$$

Если *L=1*, то величина заполненности слотов на итерации *T+1* у *i*-го актора составит:

$W_i(T+1) = W_i(T) + W_{ij}$, или с учетом (6):

$$W_i(T+1) = W_i(T) + \left(1 - \frac{W_i}{Q_S}\right) W_j E. \qquad (7)$$

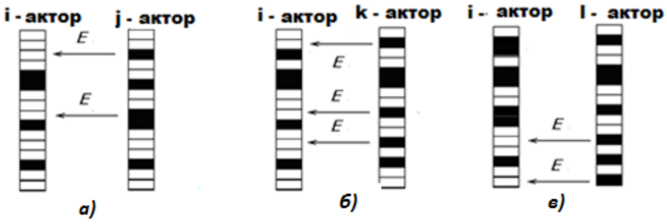


Рис.1. *Схема расчета приращения величины W у i-го актора*

На рис.1б) это иллюстрируется появлением заполненного слота в третьей позиции сверху. Для случая *L=2* *i*-й актор проверяет варианты j-го и *k*-го актора и кроме приращения (6) к рассчитанной величине из выражения (7), он получит приращение

$$W_{ik} = \frac{Q_S - [W_i + \left(1 - \frac{W_i}{Q_S}\right) W_j E]}{Q_S} W_i E.$$

Величина заполненности слотов на итерации *T+1* у *i*-го актора составит в этом случае

$$W_i(T+1) = W_i(T) + W_{ij} + W_{ik},$$

или с учетом (6) и (7)

$$W_i(T+1) = W_i(T) + \left(1 - \frac{W_i}{Q_S}\right)\left(W_j + W_k - \frac{W_j W_i E}{Q_S}\right) E. \quad (8)$$

Поступая аналогично для случая *L=3*, когда *i*-й актор проверяет варианты *j*-го, *k*-го и *l*-го актора, получим

$$W_i(T+1) = W_i(T) + \left(1 - \frac{W_i}{Q_S}\right)[W_j + W_k + W_l - -\frac{E}{Q_S}(W_j W_k + W_j W_l + +W_k W_l - \frac{W_j W_k W_l E}{Q_S})] E. \quad (9)$$

Для случая, когда все акторы обладают одинаковой вероятностью заполнения слотов на нулевой итерации $G_S$ и одинаковыми вероятностями *E* выражения (8) и (9) выглядят следующим образом:

$$W(T+1) = W(T) + \left(1 - \frac{W}{Q_S}\right) WE \qquad \text{для } L=1,$$

$$W(T+1) = W(T) + \left(1 - \frac{W}{Q_S}\right) WE\left(2 - \frac{WE}{Q_S}\right) \qquad \text{для } L=2,$$

$$W(T+1) = W(T) + \left(1 - \frac{W}{Q_S}\right) WE\left[3 - \frac{WE}{Q_S}\left(3 - \frac{WE}{Q_S}\right)\right] \qquad \text{для } L=3.$$

Приращение к величине *W(T)* для *L=2* примерно в два раза превышает приращение в случае *L=1*, а для *L=3* примерно в три раза, если пренебречь членами второго и третьего порядка малости. В общем виде для $1 \le L < M$ с достаточной для практических целей точностью можно использовать приближенное выражение

$$W(T+1) = W(T) + \left(1 - \frac{W}{Q_S}\right) WEL. \qquad (10)$$

Для *W(T)* найдем аппроксимирующую функцию *F(t)*. Время работы группы *t* будем считать, как произведение числа итераций *T* на время работы над одной итерацией $t_v$ (см. рис.2).

Функция *F(t)* обладает следующими свойствами [20]:

1. при $t \to \infty$ $F(t) \to Q_S$.

2. $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{t_V}\left(1 - \frac{F}{Q_S}\right) FEL. \qquad (11)$

при $t=0$ $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{t_V}\left(1 - \frac{G_S}{Q_S}\right) ELG_S$.

3. $F(0) = G_S$

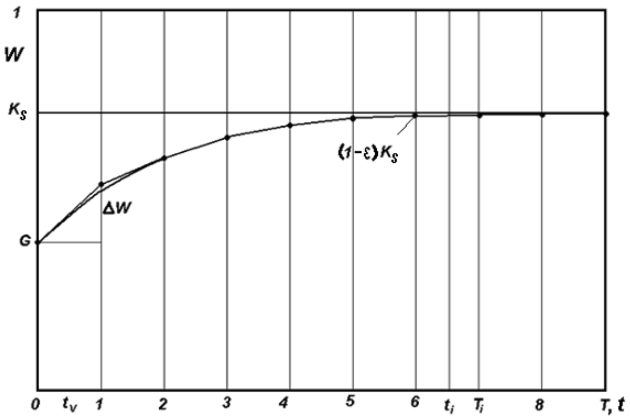


Рис.2. *Вспомогательный график зависимости W(t) для расчета времени работы группы акторов (T – номер итерации, t – время)*

Примечание: рис.1 и рис.2 взяты из [20].

Интегрируя (11), подставляя значения функции и ее производной в момент $t=0$, и заменяя отношение $t/t_V$ на номер итерации $T$, получаем зависимость относительной заполняемости слотов одним актором:

$$F(T) = \frac{Q_S}{1+\frac{Q_S - G_S}{G_S}e^{-LET}}.$$

Для того, чтобы получить функцию относительной заполняемости слотов $Q$ групповым актором в зависимости от параметров модели, можно воспользоваться результатами компьютерного моделирования, где было показано, что эта функция с достаточной для наших целей точностью также, как и $F(t)$, может быть описана логистической кривой.

Параметры этой функции – формулы МЭС для идеального актора можно найти, исходя из того, что

$$Q(0) = Q_0,\ Q(t) \to Q_h$$

$$Q = \frac{Q_h}{1+\frac{Q_h - Q_0}{Q_0}e^{-CELT}}. \qquad (12)$$

Величину настроечного параметра $C$ можно рассчитать, исходя из того, что точка пересечения кривых $F(T)$ и $Q(T)$ лежит на ординате $Q=0.5$ (это следует из того, что для любых $M$ при $G_S = 0.5$ согласно формуле Кондорсе $Q=0.5$):

$$C = \frac{ln\frac{Q_h - Q_0}{Q_{0(2Q_h-1)}}}{ln\frac{Q_S - G_S}{G_{S(2Q_S-1)}}}$$

На рис. 3 приведены результаты компьютерных экспериментов расчета $Q(T)$ для значений $G_S \in \{0.2;\ 0.4;\ 0.6\}$, $L=1$, $E=0.3$, $M=11$. Расчетные кривые, полученные из математической модели, изображены сплошными линиями. Средняя погрешность аппроксимации составляет 0.04 при максимальной ошибке 0.14. Кривые с нечетными номерами соответствуют результатам отдельных акторов в составе групп, а с четными номерами – группам акторов. Видно, что соответствующие кривые 1, 2 для $G_S = 0.2$ и кривые 3,4 при $G_S = 0.4$ пересекаются при значении ординаты $Q=0.5$. Поскольку для этих пар $G_S < 0.5$, то при $T=0$ и далее до точки пересечения кривых в ординате $Q=0.5$ в полном соответствии с теоремой Кондорсе [17] вероятность правильного решения у группового актора меньше, чем у одного актора.

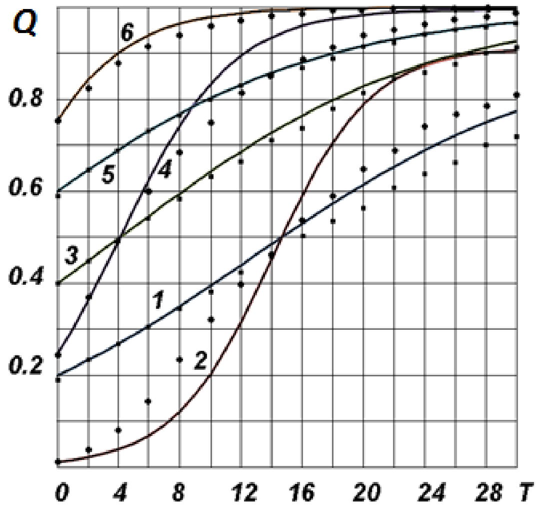


Рис.3. *Результаты расчетов зависимостей от времени относительных величин заполнения слотов Q отдельными акторами и групповым актором по компьютерной и математическим моделям*

Можно показать, что при $G_S \cong G_R \gg G_N$ и $E \cong E_R \gg E_N$ время работы группового актора

$$T_i < t_v\left[\frac{1}{EPL} ln\frac{Q_h - Q_0}{\varepsilon Q_0}\right], \qquad (13)$$

где наперед заданная малая величина $\varepsilon > 0$ определяет конец итераций, в этом случае относительная заполняемость слотов группового актора составит величину $(1-\varepsilon)Q_h$. Так как число итераций дискретная величина, от выражения, заключенного в квадратные скобки, берется целая часть.

Выражение (13) можно получить следующим образом. Приравнивая величину заполнения слотов $(1-\varepsilon)Q_h$ правой части формулы МЭС (12), и преобразовывая полученное выражение, получим:

$$\frac{Q_h - Q_0}{Q_0}e^{EPLt/t_v} = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cong \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда и следует (13)..

Для получения формулы МЭС в случае при $G_N > 0$ и $E_N > 0$ распишем выражение (10) для зависимостей $P(T)$ и $R(T)$. Так же, как и выше, рассмотрим схему появления приращения величин $P(T+1)-P(T)$ *и* $R(T+1)-R(T)$ в итерации $T+1$ для $i$-го актора, предположив, что он оценивает слоты $L$ акторов. Получим следующие выражения:

$$P(T+1) = P(T) + \frac{Q_S - R(t) - P(T)}{Q_S}P(T)E_R L \qquad (14)$$

$$R(T+1) = R(T) + \frac{Q_S - R(t) - P(T)}{Q_S}R(T)E_N L\ .$$

. Так же, как и выше, заменяя разности $P(T+1)-P(T)$ *и* $R(T+1)-R(T)$ дифференциалами, делая предельный переход и интегрируя получившиеся дифференциальные уравнения с учетом начальных условий, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$P = \frac{Q_S - R}{1 + \frac{Q_S - R - G_R}{G_R} e^{-\frac{Q_S - R}{Q_S} E_R L T}}$$

$$R = \frac{Q_S - P}{1 + \frac{Q_S - P - G_N}{G_N} e^{-\frac{Q_S - P}{Q_S} E_N L T}} \qquad .$$

Поскольку из этой системы невозможно получить в явном виде выражения зависимостей *P(T)* и *R(T),* найдем их приближенные выражения. Предположим, что искомые зависимости описываются логистической кривой имеющей три параметра *A,B* и *C*:

$$P(T) = \frac{A}{1 + Be^{-CT}} \qquad (15)$$

Если нам известны три значения этой функции при трёх различных значениях *T*, то мы сможем найти неизвестные параметры *A,B* и *C* и приближенно определить искомую функцию через параметры модели. Значение функции $P(0) = G_R$ , а *P(1)* мы можем

определить из (14):

$$P(1) = G_R + \frac{Q_S - G_S}{Q_S} G_R E_R L. \qquad (16)$$

Аналогично, $R(0) = G_N$ и из (14)

$$R(1) = G_N + \frac{Q_S - G_S}{Q_S} G_N E_R L. \qquad (17)$$

Значение функции $P_B$ при $T \to \infty$ можно определить приближенно, найдя значения этой функции при $E_N = 0$ и $E_N = E_R$, и взяв в качестве значения функции $P(E_N)$ линеаризованное значение, находящееся между ними:

$$P_B = \quad P_B(0) + (P_B(E_R) - P_B(0)) \frac{E_N}{E_R} \qquad (18)$$

Поскольку $P_S(0) = Q_S - G_N$, а $P_B(E_R) = \frac{Q_S G_R}{G_S}$, то после соответствующих подстановок получим:

$$P_B = (Q_S - G_N)(1 + \left(\frac{Q_S G_R}{G_S(Q_S - G_N)} - 1\right) \frac{E_N}{E_R}). \qquad (19)$$

Аналогично, для $R_B$ , учитывая, что $R_B(0) = G_N$ и

$R_B(E_R) = \frac{Q_S G_N}{G_S}$, получим:

$$R_B = G_N(1 + \left(\frac{Q_S}{G_S} - 1\right) \frac{E_N}{E_R}) \qquad (20)$$

Подставляя сюда найденные значения (17) - (20) в (15) и решая получившиеся системы уравнений, получим для *P(T)* и *R(T)* следующие выражения:

$$P = \frac{P_B}{1 + \left(\frac{G_R}{P_B - G_R}\right)^{T-1} \left(\frac{P_B - P(1)}{P(1)}\right)^T} \qquad (21)$$

$$R = \frac{R_B}{1 + \left(\frac{G_N}{R_N - G_N}\right)^{T-1} \left(\frac{R_S - R(1)}{R(1)}\right)^T}$$

Сравнение полученных результатов с результатами компьютерных экспериментов показали, что ошибка не превышает 0.02 в широком диапазоне изменения входных параметров модели.

Для получения приближенной зависимости вероятности $Q_R$ получения правильного решения группы от параметров модели воспользуемся описанными выше приемами, позволившими с приемлемой для практических расчетов точностью описать зависимости *P(T)* и *R(T).* В качестве аппроксимирующей зависимости $Q_R(T)$ также выберем логистическую кривую, являющуюся хорошим приближением для нашей задачи, что и было показано выше для случая $G_R \gg G_N$ и $E_R \gg E_N$. Итак, в качестве трех реперных точек выберем значения *T=0*, $T = T_{0.5}$ (см. ниже) и $T \to \infty$.

Для *T=0* значение искомой функции $Q_R$ находим по формуле Кондорсе при $G = G_R$.

В качестве второй точки выбираем такое значение *T*, при котором $P(T_{0.5}) = 0.5$. Мы знаем, что в этой точке, исходя из свойств формулы Кондорсе, функция $Q_R$ также равна 0.5 для всех значениях параметров модели. Итак, исходя из (21) для *P=0.5* после очевидных преобразований получим:

$$T_{0.5} = ln \frac{G_R(2P_B - 1)}{P_B - G_R} ln \frac{P(1)(P_B - G_R)}{G_R[P_B - P(1)]}$$

Значение функции $Q_B$ при $T \to \infty$ можно найти приближенно, найдя значения этой функции при $E_N = 0$ и $E_N = E_R$, и взяв в качестве значения функции $Q_B(E_N)$ линеаризованное значение, находящееся между ними:$Q_B = Q_B(0) + (Q_B(E_R) - Q_B(0)) \frac{E_N}{E_R}$.

Поскольку$Q_B(0) = Q_h - G_N$, а $Q_B(E_R) = \frac{Q_S G_R}{G_S}$, то после соответствующих подстановок получим:$Q_B$

$$(Q_h - G_N)(1 + \left(\frac{Q_S G_R}{G_S(Q_h - G_N)} - 1\right) \frac{E_N}{E_R}).$$

Подставляя найденные значения для $Q_R$ в (12) и решая получившиеся системы уравнений, получим формулу МЭС – зависимость вероятности правильного решения группой акторов от параметров модели:

$$Q_R = \frac{Q_B}{1 + \frac{Q_B - Q_{R0}}{Q_{R0}} e^{-C_P T}}, \qquad (22)$$

$$\text{где } C_P = \frac{1}{T_{0.5}} \ln \frac{Q_B - Q_{R0}}{Q_{R0}(2Q_B - 1)}. \qquad (23)$$

## IV. Результаты расчетов

Для оценки ошибок приближения, даваемого формулой МЭС, с помощью компьютерной модели проводились расчеты функции $Q_R$ в широких пределах изменения ее параметров. Средняя относительная ошибка описания функции формулой (22) составила 0.042 при максимальной ошибке 0.14. Данные компьютерной модели усреднялись по тысяче реализаций при среднеквадратичном отклонении 0.012. На рис.4 приведены результаты этих расчетов при значениях параметров модели *M=7, L=3,* $G_R = 0.3$, $G_N$ =0.1, $E_R = 0.3$ , $E_N$ =0.1.

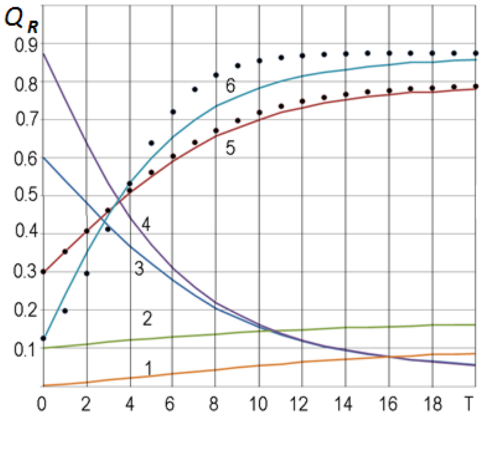


Рис 4. *Сравнительные результаты расчетов по формуле МЭС и компьютерной модели*

Сплошными линиями представлены зависимости, полученные с помощью компьютерной модели, кружками – результаты расчетов по формуле (22) и (23). На рис.4. представлены следующие функции в зависимости от номера итерации $T$:

1-зависимость относительного числа неправильно заполненных слотов группой акторов $Q_N$,

2- та же зависимость для одиночного актора,

3- зависимость относительной величины незаполненных слотов для одиночного актора $G_V$,

4-та же зависимость для группы акторов $Q_V$,

5-зависимость относительного числа правильно заполненных

слотов одиночным актором $G_R$,

6-та же зависимость для группы акторов $Q_R$.

## V. Обсуждение результатов

Расчеты по математической и компьютерной модели показали два важных результата.

Во-первых, получено превышение вероятности правильного решения группы над вероятностью одиночного актора, а также наблюдается значительное увеличение вероятности правильного решения от значения 0.3 у одиночного актора на стадии генерации решений до 0.87 у группы акторов после согласования. Здесь следует отметить, что без стадий согласования общий результат группы согласно теореме Кондорсе, составил бы величину вероятности правильного решения всего 0.11.

Во-вторых, вероятность ошибочного решения группы после стадий согласования получается меньше вероятности ошибочного решения у одного актора после стадии генерации.

## VI. Заключение

В заключение можно сделать следующие выводы

Исходя из результатов сравнения полученной математической модели итеративного МЭС и компьютерной модели, дающей при большом количестве расчетов по методу Монте-Карло статистически значимые значения величин вероятностей правильного решения группы акторов, можно сделать вывод, что полученную математическую модель можно применять для дальнейшего развития теории систем коллективного интеллекта.

С использованием этой модели, например, можно делать прогнозы о величинах вероятностей правильных и ошибочных решений в зависимости от числа акторов и числа итераций согласования, если известны значения трудностей задач и креативных характеристик акторов.

Важным является вывод о том, что подтверждена полнота и достаточность исходных принципов, положенных в основу итеративного метода эволюционного согласования решений, а именно: теории метасистемных переходов Турчина и сформулированных исходя из нее, а также из генетических алгоритмов, правил взаимодействия между акторами..

Использование двух ролей акторов - как генераторов вариантов первоначальных решений, так и экспертов, оценивающих чужие решения, а также использование троичной логики в МЭС позволило существенно повысить эффективность работы группы.

Применение модифицированной однопараметрической модели Раша, позволяет оценивать вероятности получения правильных и ошибочных ответов исходя из подготовленности акторов как к генерации решений, так и их способностей к экспертизе чужих решений.

## Библиография


[1] Попов Б.М. Метафизика природоподобных технологий. – Воронеж: Кварта. 2019. – 60 с.

[2] Alexandros Tzanetos, Iztok Fister Jr., Georgios Dounias. A comprehensive database of Nature-Inspired Algorithms // Data in Brief. Volume 31. 2020. P. 2–9. https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105792

[3] Ткаченко Ю. Л. Какие технологии являются природоподобными? Новая тема для концептуальной дискуссии // Успехи современной науки. – 2016. –№3, Том 1. С.101–107.

[4] Yegorova-Gudkova T. Management that resemble natural ones and design of self-organizing economic systems//International scientific journal "Science. Business. Society". – 2018. –Vol. 3, Issue 2. –P. 75-77.

[5] А.А. Жданов. Общая теория систем: анализ и дополнения. Электронное издание. М.: Изд-во «Лаборатория знаний». – 2024 – 192 с.

[6] Карпов В.Э. Методологические проблемы эволюционных вычислений // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – №4. – С. 95-102.

[7] Fields, Chris, James F. Glazebrook, and Michael Levin.. Principled Limitations on Self-Representation for Generic Physical Systems // Entropy. –2024. Vol. 3. P. 1–16.

[8] В.И. Протасов. Методология и практика построения систем коллективного интеллекта. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. –Нижний Новгород, НГТУ им. Алексеева. –2021. –314 с.

[9] Л.В. Маркарян. Модели и алгоритмы системы коллективного интеллекта. – М: Изд. МИСиС. – 2020. – 104 с.

[10] Маркарян Л. В. Анализ и оптимизация процесса принятия решений на основе метода эволюционного согласования решений // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). –2013, № 9. С. 301-306.

[11] Протасов В.И., Мирахмедов Р.О., Потапова З.Е., Шарнин М.М., Шаронов А.В. Уменьшение ошибок первого рода при распознавании контуров самолетов с использованием коллективного интеллекта БЛА // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –2018, № 6-3 (86). –С. 70-82.

[12] Протасов, З.Е. Потапова. Методика кардинального снижения вероятности принятия ошибочных решений в системах коллективного интеллекта // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование». –2019, том 15, №. 3. – С. 588 – 601.

[13] R. Mirakhmedov, Z. Potapova, V. Protasov . MESING – a new method of organizing the joint work of neural networks and its metrology // Journal of Physics: Conference Series, 2021, v. 1727, 012004. DOI 10.1088/1742-6596/1727/1/012004.

[14] Протасов В.И. Системы коллективного интеллекта. Теория и практика. – М: Вузовская книга. – 2024. – 230 с.

[15] Турчин, В.Ф. Феномен науки. Кибернетический подход к эволюции. —М.: Синтег,1993. — 456 с.

[16] Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests // Expanded Edition, with Foreword and Afterword by B.D. Wright. Chicago: University of Chicago Press,1980.

[17] Condorcet, marquis de (Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat) (1785), Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisionsrendues à la pluralité des voix. Imprimerie Royale, Paris.
[18] Holland, J.H. Adaptation in natural and artificial systems. – University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975. —228 p.
[19] Y. Koriyama. A resurrection of the Condorcet Jury Theorem Balázs Szentes // Theoretical Economics. 2009, v.4. — P. 227–252.
[20] В. Протасов. Математическая модель метода эволюционного согласования решений // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012, № 2 (46). – С. 29-37.

Роман Октамович Мирахмедов,
аспирант каф. 311 Московского авиационного института, Москва, Россия. ORCID 0000-0001-8930-0138
mirakhmedov@gmail.com

# Mathematical model of the iterative method of evolutionary coordination of solutions

Roman Mirakhmedov

*Abstract*—**The shortcomings of existing methods for making decisions by groups of experts are discussed and a conclusion is drawn in favor of the method of evolutionary coordination of decisions. The principles on which this method is based are given, along with definitions, terminology and procedures. The formulation of the problem, the limiting and initial values of the initial quantities are given. A mathematical model of the iterative method of evolutionary coordination of solutions has been constructed. The results of a theoretical consideration of the method of evolutionary coordination of decisions by a group of actors are presented. The dependences of the probabilities of correct and incorrect solutions of local problems on the creative characteristics of the actors, on the difficulties of the problems, on the number of actors and on the number of iterations were found. The method is based on the provisions of the theory of metasystem transitions by V. Turchin using the rules of interaction between actors. The rules are formulated on the basis of this theory in accordance with the operators of genetic algorithms, which act as a coordinator in the process of work of a group of actors. At the stages of generating solutions and their examination, ternary logic is used. Actors in the process of group work can give correct answers, erroneous answers and "I don't know" answers. To construct a mathematical model, the principles of probability theory, the one-parameter Rasch model modified for the new method, and Condorcet's jury theorem were used. A comparison was made of the results of using the mathematical model and computer calculations using the Monte Carlo method. Conclusions are drawn about the predictive capabilities of the proposed model.**

*Key words*—**genetic algorithms, Rasch model, Condorcet's theorem, rules of interaction, evolutionary coordination of decisions, group of actors, mathematical model.**

## REFERENCES

[1] Popov B.M. Metaphysics of nature-like technologies. – Voronezh: Kvarta. –2019. – 60 p.

[2] Alexandros Tzanetos, Iztok Fister Jr., Georgios Dounias. A comprehensive database of Nature-Inspired Algorithms // Data in Brief. Volume 31. 2020. P. 2–9. https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105792

[3] Tkachenko Yu. L. What technologies are nature-like? A new topic for conceptual discussion // Advances in modern science. – 2016. –№3, Vol. 1. P.101–107

[4] Yegorova-Gudkova T. Management that resemble natural ones and design of self-organizing economic systems//International scientific journal "Science. Business. Society". – 2018. –Vol. 3, Issue 2. –P. 75-77.

[5] A.A. Zhdanov. General systems theory: analysis and additions. Electronic edition. M.: Publishing house "Laboratory of Knowledge". – 2024 – 192 p.

[6] Karpov V.E. Methodological problems of evolutionary computing // Artificial intelligence and decision making. – 2012. – No. 4. – pp. 95-102.

[7] Fields, Chris, James F. Glazebrook, and Michael Levin.. Principled Limitations on Self-Representation for Generic Physical Systems // Entropy. –2024. Vol. 3. P. 1–16.

[8] V.I. Protasov. Methodology and practice of building collective intelligence systems. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences. –Nizhny Novgorod, NSTU named after. Alekseeva. –2021. –314 p,

[9] L.V. Markaryan. Models and algorithms of collective intelligence systems. – M: Ed. MISiS. – 2020. – 104 p.

[10] Markaryan L.V. Analysis and optimization of the decision-making process based on the method of evolutionary coordination of decisions // Mining information and analytical bulletin (scientific and technical journal). –2013, No. 9. P. 301-306.

[11] ] Protasov V.I., Mirakhmedov R.O., Potapova Z.E., Sharnin M.M., Sharonov A.V. Reducing errors of the first type when recognizing the contours of aircraft using the collective intelligence of UAVs // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. –2018, No. 6-3 (86). –C. 70-82.

[12] Protasov, Z.E. Potapova. Methodology for radically reducing the likelihood of making erroneous decisions in collective intelligence systems // International scientific journal "Modern information technologies and IT education". –2019, volume 15, no. 3. – pp. 588 – 601.

[13] R. Mirakhmedov, Z. Potapova, V. Protasov . MESING – a new method of organizing the joint work of neural networks and its metrology // Journal of Physics: Conference Series, 2021, v. 1727, 012004. DOI 10.1088/1742-6596/1727/1/012004.

[14] Protasov V.I. Collective intelligence systems. Theory and practice. – M: University book. – 2024. – 230 p

[15] Turchin, V.F. Phenomenon of science. Cybernetic approach to evolution. -M.: Sinteg, 1993. — 456 p.

[16] Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests // Expanded Edition, with Foreword and Afterword by B.D. Wright. Chicago: University of Chicago Press,1980.

[17] Condorcet, marquis de (Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat) (1785), Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisionsrendues à la pluralité des voix. Imprimerie Royale, Paris.

[18] Holland, J.H. Adaptation in natural and artificial systems. – University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975. —228 p.

[19] Y. Koriyama. A resurrection of the Condorcet Jury Theorem Balázs Szentes // Theoretical Economics. 2009, v.4. — P. 227–252.

[20] V. Protasov. Mathematical model of the method of evolutionary coordination of decisions // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. – 2012, No. 2 (46). – P. 29-37.



Roman Mirakhmedov,
Postgraduate student, Moscow Aviation Institute, postgraduate student of the department of applied software and mathematical method. ORCID 0000-0001-8930-0138, mirakhmedov@gmail.com