

Математическое моделирование движения осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде

Д.В. Беляков

Аннотация- Работа посвящена построению и исследованию математической модели движения авторотирующего тела сложной конфигурации в гравитационном поле. Исследуется вопрос о существовании у системы уравнений движения тела различных стационарных режимов спуска. Показано существование режима авторотации, при котором тело быстро вращается и осуществляет спуск по вертикали или наклонной прямой. При помощи метода осреднения для этого режима получены оценки угловой скорости, скорости центра масс и угла отклонения вектора скорости центра масс от вертикали, доказано, что режим авторотации является притягивающим. Показано влияние на отклонение спуска от вертикали с помощью изменения одного из конструктивных параметров. Спуск в режиме авторотации происходит с наименьшей скоростью по сравнению с другими режимами, поэтому авторотация - наиболее подходящий режим для применения этой конструкции в качестве аэродинамического тормозного устройства. Выполнены численные исследования движения тела, которые сравниваются с полученными теоретическими оценками, по которым можно судить об адекватности предложенной математической модели.

Ключевые слова - тело сложной конфигурации, стационарный режим, осреднение, установочный угол тела, установочный угол пластинок.

Введение

В задачах динамики тела, взаимодействующего со средой, существует проблема моделирования взаимодействия среды с авторотирующими телами разных конфигураций. В авиаконструировании существует необходимость решения такой проблемы. Простейшей моделью авторотирующего тела является аэродинамический маятник в потоке сопротивляющейся среды. Эту модель можно рассматривать как обобщение классической задачи о физическом маятнике. С другой стороны, с такой моделью можно сопоставить многие реальные механические системы, такие как крыло, парус, парашют, ветродвигатель в виде несущего винта. Несущий винт с вертикальной осью служит еще одной простейшей моделью авторотирующего тела. Всем известно использование режима авторотации при аварийной посадке вертолета. Вертикальная составляющая скорости при снижении быстровращающегося тела намного меньше окружной скорости лопастей. Это позволяет использовать такие модели в качестве систем торможения при спуске в атмосфере. В 1920 году Дарье предложил идею

ветротурбины с вертикальной осью вращения (см. рис.1). Преимущество такой конструкции перед другими турбинами состоит в том, что она не требует вмешательства в свою работу при смене направления ветра.

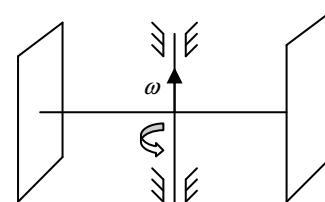


Рис. 1 Ветрогенератор Дарье

В работе рассматривается математическая модель плоскопараллельного спуска тела сложной конфигурации, представляющего рабочий элемент ветротурбины Дарье и показывается, что из него можно построить систему спуска в атмосфере.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССМАТРИВАЕМОГО ТЕЛА

Рассмотрим плоскопараллельное движение в квазистатической среде тела, представляющего собой рабочий элемент ветротурбины Дарье. Тело состоит из стержня и двух параллельных пластинок. Плоскости пластинок образуют угол δ с плоскостью, ортогональной стержню (Рис. 2). Будем считать, что движение происходит в вертикальной плоскости.

В модели воздействия среды на тело используется гипотеза о квазистационарном обтекании пластинок средой [3], [4], [5], [6], [10]. Согласно этой гипотезе сила воздействия среды на каждую пластинку характеризуется скоростью некоторой ее точки, которая называется центром давления. Модель с неподвижным центром давления рассматривалась в [1], [2], [10], [12]. В рассматриваемой модели предполагается, что центры давления пластинок точки А и В можно считать подвижными относительно пластинок. Сдвиг центра давления описывается функцией $\mathcal{E}(\alpha)$. Зависимость $\mathcal{E}(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными [6]. Типичный вид $\mathcal{E}(\alpha)$ (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 4. Считается также, что среда не оказывает никакого влияния на стержень. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: силы сопротивления \vec{S}_A, \vec{S}_B , направленные против абсолютных скоростей \vec{V}_A, \vec{V}_B

Статья получена 15 февраля 2015.
Д. В. Беляков, к.т.н., доцент, МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского,
г. Москва (e mail: pm@mati.ru)

центров давления, и подъемные силы \vec{P}_A, \vec{P}_B , направленные им ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha + \delta)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha + \delta)V_A^2$$

$$|\vec{S}_B| = s(\beta + \delta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\beta + \delta)V_B^2$$

$$|\vec{P}_B| = p(\beta + \delta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\beta + \delta)V_B^2$$

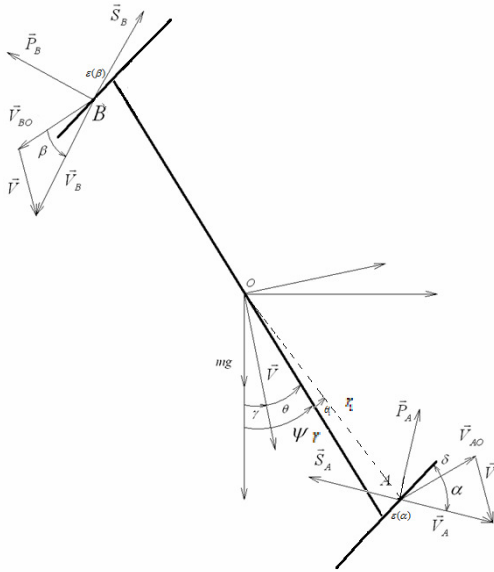


Рис. 2 Рассматриваемое тело

Где α, β - углы атаки между векторами окружных скоростей ($\vec{V}_{AO}, \vec{V}_{BO}$) точек A, B и векторами \vec{V}_A, \vec{V}_B , p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Зависимости $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ определены из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и являются экспериментальными данными [6]. Их типичный вид (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 3.

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координаты x, y центра масс O , совпадающего с серединой стержня AB , и угол ψ отклонения стержня AB от вертикали. Для описания распределения скоростей точек нашего тела, зададим величину вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} , угол γ отклонения вектора \vec{V} от вертикали, угол θ отклонения стержня AB от вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} и абсолютную угловую скорость стержня $\vec{\omega}$.

Где α, β - углы атаки между векторами окружных скоростей ($\vec{V}_{AO}, \vec{V}_{BO}$) точек A, B и векторами \vec{V}_A, \vec{V}_B ,

p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Зависимости $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ определены из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и являются экспериментальными данными [6]. Их типичный вид (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 3.

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координаты x, y центра O масс, совпадающего с серединой стержня AB , и угол ψ отклонения стержня AB от вертикали. Для описания распределения скоростей точек нашего тела, зададим величину вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} , угол γ отклонения вектора \vec{V} от вертикали, угол θ отклонения стержня AB от вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} и абсолютную угловую скорость стержня $\vec{\omega}$.

В системе координат, связанной с вектором \vec{V} (см. рис. 1), для векторов $\vec{V}_{AO}, \vec{V}_A, \vec{V}_B$ имеем представление:

$$\vec{V}_{AO} = \{-r_1\omega\sin(\theta + \theta_1), \quad r_1\omega\cos(\theta + \theta_1)\},$$

$$\vec{V}_A = \{V - r_1\omega\sin(\theta + \theta_1), \quad r_1\omega\cos(\theta + \theta_1)\},$$

$$\vec{V}_B = \{V + r_1\omega\sin(\theta + \theta_1), \quad -r_1\omega\cos(\theta + \theta_1)\}$$

Следовательно, силы сопротивления можно определить как:

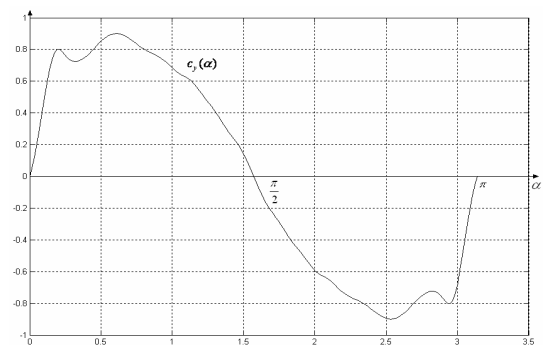
$$\vec{S}_A = s(\alpha)V_A\{r_1\omega\sin(\theta + \theta_1) - V, \quad -r_1\omega\cos(\theta + \theta_1)\}$$

$$\vec{S}_B = s(\beta)V_B\{-V - r_1\omega\sin(\theta + \theta_1), \quad r_1\omega\cos(\theta + \theta_1)\}$$

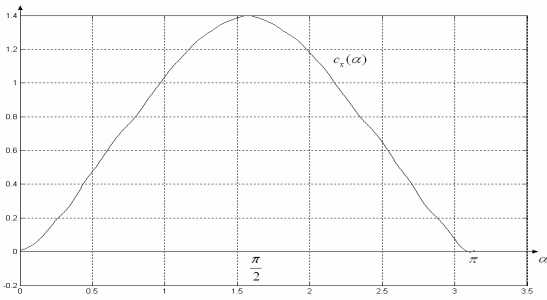
А подъемные силы будут иметь вид:

$$\vec{P}_A = p(\alpha)V_A\{r_1\omega\cos(\theta + \theta_1), \quad r_1\omega\sin(\theta + \theta_1) - V\}$$

$$\vec{P}_B = p(\beta)V_B\{-r_1\omega\cos(\theta + \theta_1), \quad -V - r_1\omega\sin(\theta + \theta_1)\}$$



а



б
Рис. 3 Аэродинамические функции:
а) подъемной силы; б) силы сопротивления

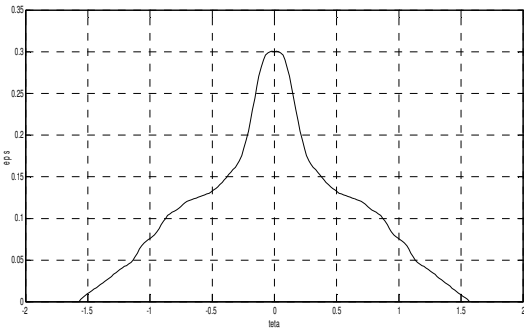


Рис. 4 Сдвиг центра давления

Для того, чтобы составить уравнения движения тела, воспользуемся теоремой о движении центра масс в проекциях на направление вектора V и ему ортогональное, теоремой об изменении кинетического момента и теоремой о сложении скоростей. Получим:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= p(\alpha)V_A[r\alpha\cos\theta - \varepsilon(\alpha)\alpha\sin(\theta+\delta)] - \\
 &- p(\beta)V_B[r\alpha\cos\theta + \varepsilon(\alpha)\alpha\sin(\theta+\delta)] + \\
 &+ s(\alpha)V_A[r\alpha\sin\theta - V + \varepsilon(\alpha)\alpha\cos(\theta+\delta)] - \\
 &- s(\beta)V_B[r\alpha\sin\theta + V + \varepsilon(\alpha)\alpha\cos(\theta+\delta)] + mg\cos\gamma \\
 mV\dot{\gamma} &= -s(\alpha+\delta)V_A[r\alpha\cos\theta - \varepsilon(\alpha)\alpha\sin(\theta+\delta)] + \\
 &+ s(\beta+\delta)V_B[r\alpha\cos\theta - \varepsilon(\alpha)\alpha\sin(\theta+\delta)] + \\
 &+ p(\alpha)V_A[r\alpha\sin\theta - V + \varepsilon(\alpha)\alpha\cos(\theta+\delta)] - \\
 &- p(\beta)V_B[r\alpha\sin(\theta-\delta) + V + \varepsilon(\alpha)\alpha\cos(\theta+\delta)] - mg\sin\gamma \\
 J\dot{\omega} &= V_A^2[p(\alpha)(r\sin(\alpha-\delta) - \varepsilon(\alpha)\cos\alpha) - \\
 &- s(\alpha)(p(\alpha)(r\sin(\alpha-\delta) + \varepsilon(\alpha)\cos\alpha)) - \\
 &- V_B^2[p(\beta)(r\sin(\beta-\delta) + \varepsilon(\beta)\cos\beta) - \\
 &- s(\beta)(r\cos(\beta-\delta) - \varepsilon(\beta)\sin\beta)] \\
 \dot{\theta} + \dot{\gamma} &= \omega
 \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения, определяющие величины V_A, V_B, α, β , через фазовые переменные V, θ, ω , имеют вид:

$$\begin{aligned}
 V_A \sin(\alpha - \delta) &= \varepsilon\omega\cos\delta - V\cos\theta, \\
 V_A \cos(\alpha - \delta) &= r\omega - V\sin\theta + \varepsilon\omega\sin\delta \\
 V_B \sin(\beta - \delta) &= \varepsilon\omega\cos\delta + V\cos\theta, \\
 V_B \cos(\beta - \delta) &= r\omega + V\sin\theta + \varepsilon\omega\sin\delta
 \end{aligned} \tag{2}$$

Кинематические соотношения, связывающие координаты центра масс с V и γ имеют вид:

$$\dot{x} = V\cos\gamma, \dot{y} = V\sin\gamma \tag{3}$$

II. НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ АТАКИ

Несмотря на то, что величины скоростей центров давления определяются из (2) однозначно:

$$\begin{aligned}
 V_A &= \sqrt{(\varepsilon\omega\cos\delta - V\cos\theta)^2 + (r\omega - V\sin\theta - \varepsilon\omega\sin\delta)^2} \\
 V_B &= \sqrt{(\varepsilon\omega\cos\delta + V\cos\theta)^2 + (r\omega + V\sin\theta - \varepsilon\omega\sin\delta)^2}
 \end{aligned}$$

Если выразить $\alpha = \alpha(\vartheta, \omega, V)$ и $\beta = \beta(\vartheta, \omega, V)$ из кинематических соотношений (2), то мы получим:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctg\left(\frac{\varepsilon\omega\cos\delta - V\cos\theta}{r\omega - V\sin\theta - \varepsilon\omega\sin\delta}\right) + \delta \\
 \beta &= \arctg\left(\frac{\varepsilon\omega\cos\delta + V\cos\theta}{r\omega + V\sin\theta - \varepsilon\omega\sin\delta}\right) + \delta
 \end{aligned} \tag{4}$$

Казалось бы можно подставить соотношения (4) в систему (1) и приступить к исследованию движения тела, как мы это делали в [1], [2]. Однако при некоторых значениях (ϑ, ω, V) на фазовой плоскости существуют области, в которых значение углов α, β из кинематических соотношений (2) определяется неоднозначно.

Для центра давления точки А будем иметь:

Рассмотрим все точки фазовой плоскости, для которых: $\omega = \frac{V\sin\theta}{r + \varepsilon_\delta\sin\delta}$, где $\varepsilon_\delta = \varepsilon\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$

Для этих точек из второго уравнения (1.2) будем иметь: либо $\cos(\alpha - \delta) = 0$, либо $V_A = 0$.

Если $\cos(\alpha - \delta) = 0$ и $V_A \neq 0$, то тогда $\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + \delta$ и $\varepsilon\left(\delta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\varepsilon_\delta$

Тогда для:

1.
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \delta$$
 имеем:

$$V_A = \frac{-\varepsilon_\delta V \sin(\theta + \delta) - Vr \cos \theta}{r + \varepsilon_\delta \sin \delta}$$

Следовательно для всех точек множества $\{\theta \in (-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} + \delta); \omega = \frac{V \sin \theta}{r + \varepsilon_\delta \sin \delta}\}$

Кинематические соотношения (1.2) имеют решение
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \delta$$

2. для
$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + \delta$$
 имеем:

$$V_A = \frac{-\varepsilon_\delta V \sin(\theta + \delta) + Vr \cos \theta}{r - \varepsilon_\delta \sin \delta}$$

Следовательно для всех точек множества $\{\theta \in (-\pi + \delta, -\frac{\pi}{2} + \delta) \cup (\frac{\pi}{2} + \delta, \pi + \delta); \omega = \frac{V \sin \theta}{r + \varepsilon_\delta \sin \delta}\}$

Кинематические соотношения (2) имеют решение
$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + \delta$$

3. Если $V_A = 0$, то тогда α находится из уравнения
$$\varepsilon(\alpha) = \frac{r \operatorname{ctg} \theta}{\cos \delta + \sin \delta \operatorname{ctg} \theta}$$
, которое

имеет (в силу свойств функции $\varepsilon(\alpha)$) не менее двух решений, если $|\operatorname{ctg} \theta| < \varepsilon_m = \varepsilon(0)$

например, при $\delta = 0$ корни на рисунке 5 показано, что это уравнение на промежутке $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ имеет три корня

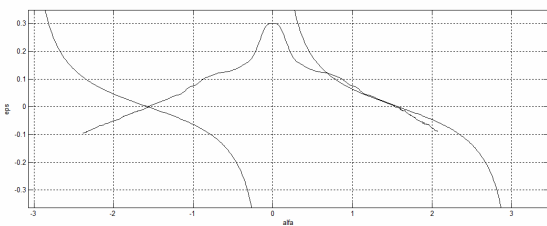


Рис. 5 Неоднозначность углов атаки

Все те же рассуждения можно повторить и для центра давления точки В

Исключая V_A из кинематических соотношений (2), получим уравнения для определения α, β :

$$\operatorname{tg}(\alpha - \delta) = \frac{\varepsilon \omega \cos \delta - V \cos \theta}{r \omega - V \sin \theta - \varepsilon \omega \sin \delta}$$

$$\operatorname{tg}(\beta - \delta) = \frac{\varepsilon \omega \cos \delta + V \cos \theta}{r \omega + V \sin \theta - \varepsilon \omega \sin \delta}$$

Первое из которых можно переписать в виде:

$$\varepsilon \omega (\cos \delta + \operatorname{tg}(\alpha - \delta) \sin \delta) = \operatorname{tg}(\alpha - \delta) (r \omega - V \sin \theta) + V \cos \theta$$

при условиях:

$$\sin(\alpha - \delta) (\varepsilon \omega \cos \delta - V \cos \theta) > 0$$

$$\cos(\alpha - \delta) (r \omega - V \sin \theta - \varepsilon \omega \sin \delta) > 0$$

Эти условия отражают ограничения на знаки ограничений $\sin(\alpha - \delta) > 0$ и $\cos(\alpha - \delta) > 0$ в (2).

Левая и правая часть этого уравнения (θ, ω, V) является функцией от α . Ограничимся рассмотрением графического решения этого уравнения. Рассмотрим точки, для которых $r \omega - V \sin \theta > 0$. Коэффициент при $\operatorname{tg}(\alpha - \delta)$ положителен и при $|\alpha - \delta| < \frac{\pi}{2}$ имеем следующую картину:

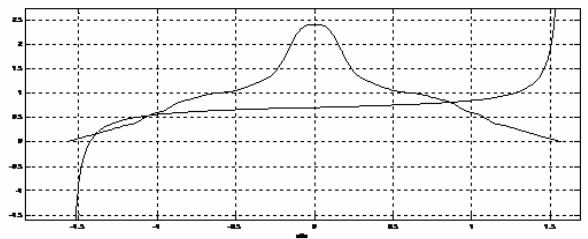


Рис. 6 Неоднозначность углов атаки

На рисунке 6 видно, что на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ существуют ровно три решения

Рассмотрим точки, для которых $r \omega - V \sin \theta < 0$. Коэффициент при $\operatorname{tg}(\alpha - \delta)$ отрицателен и при $|\alpha - \delta| > \frac{\pi}{2}$ имеем следующую картину

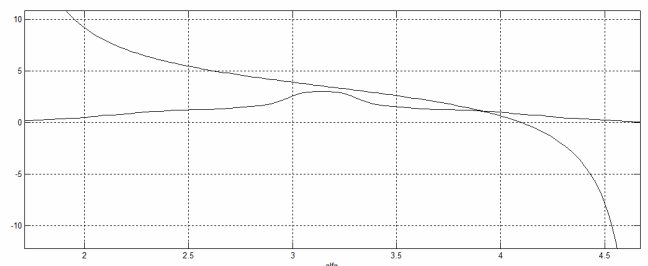


Рис. 7

На рисунке 7 видно, что на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ существует только одно решение.

Неоднозначность определения углов атаки α, β означает, что в этот момент неоднозначно определяется и положение центра давления и величины аэродинамических сил. Это происходит, когда маятник проходит положения $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + \delta$, а скорость центров давления относительно среды близка к нулю. При прохождении областей неоднозначности значения α, β следует выбирать, сохраняя непрерывность их изменения. Можно отметить, опуская детальный анализ, что при прохождении областей неоднозначности всегда существует непрерывные ветви углов атаки $\alpha = \alpha(\vartheta, \omega, V)$ и $\beta = \beta(\vartheta, \omega, V)$.

Таким образом, построена математическая модель рассматриваемого тела, представляющая замкнутую и полностью определенную систему уравнений (1)-(3).

III. ПРОСТЕЙШИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ

Будем искать простейшие установившиеся режимы движения, при которых у тела отсутствует вращение. При этом тело будет совершать поступательное движение, т.е. $\omega \equiv 0$. Правая часть уравнения изменения кинетического момента системы (1) обращается в нуль, так что

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} = & V_A^2 [p(\alpha)(r \sin(\alpha - \delta) - \varepsilon(\alpha) \cos \alpha) - \\ & - s(\alpha)(p(\alpha)(r \sin(\alpha - \delta) + \varepsilon(\alpha) \cos \alpha)] - \\ & - V_B^2 [p(\beta)(r \sin(\beta - \delta) + \varepsilon(\beta) \cos \beta) - \\ & - s(\beta)(r \cos(\beta - \delta) - \varepsilon(\beta) \sin \beta)] \equiv 0 \end{aligned}$$

Действительно, аэродинамические функции $s(\alpha), p(\alpha)$ имеют период π , а углы атаки при поступательном движении связаны соотношением: $\beta = \pi + \alpha$.

При поступательном движении из кинематических соотношений (2) следует: $tg \alpha = ctg \theta$, откуда

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ Но с другой стороны: } \psi = \gamma + \theta. \text{ Поэтому:}$$

$$\gamma = \psi + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Для определения стационарных значений V и γ запишем уравнения движения центра масс:

$$\begin{aligned} -2s(\alpha + \delta)V^2 + mg \cos \gamma &= 0 \\ -2p(\alpha + \delta)V^2 - mg \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Разделим второе уравнение системы (4) на первое и получим:

$$\gamma = -arctg(k(\alpha + \delta)) \quad (5)$$

Учитывая то, что $\gamma = \psi + \alpha - \frac{\pi}{2}$

имеем: $tg \gamma = tg(\psi + \alpha - \frac{\pi}{2}) = -ctg(\psi + \alpha)$, тогда:

$$ctg(\psi + \alpha) = \frac{p(\alpha + \delta)}{s(\alpha + \delta)} = k(\alpha + \delta) \quad (6)$$

Величину установившейся скорости можно найти по формуле:

$$V = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{2s(\alpha + \delta)}} = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{2s(\alpha')}} \quad (7)$$

где $\alpha' = \alpha + \delta$

Для удобства будем отсчитывать угол атаки α с противоположной стороны пластинки. При этом уравнение (6) примет вид:

$$ctg(\psi + \alpha) = k(\alpha - \delta) \quad (8)$$

Формула (7) примет вид:

$$V = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{2s(\alpha - \delta)}} = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{2s(\tilde{\alpha})}} = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{\rho \sigma c_x(\tilde{\alpha})}} \quad (9)$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha - \delta$

Таким образом, любому произвольному значению установочного угла тела ψ соответствует некоторый установившийся режим движения тела. Дадим графическую интерпретацию решений уравнения (6) для тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением $\lambda = 8$, установленные под малым углом δ , при различных значениях угла ориентации тела ψ . Приведем наиболее характерные стационарные режимы движения. Обсудим сначала простейший случай, при котором

$\psi = \frac{\pi}{2} - \delta$ и пластинки расположены вертикально

(Рис. 8, 9). Для определения оценок установившихся скорости и угла планирования, перепишем уравнение (6) в

случае $\psi = \frac{\pi}{2} - \delta$: $-tg(\alpha - \delta) = k(\alpha - \delta)$. Отсюда мы

видим, что в случае $\psi = \frac{\pi}{2} - \delta$ уравнение (6) имеет

решение $\alpha = \delta$, поэтому из соотношения (5) следует, что $\gamma = 0$. мы получили первый установившийся режим вертикального спуска, изображенный на рисунках 8,9.

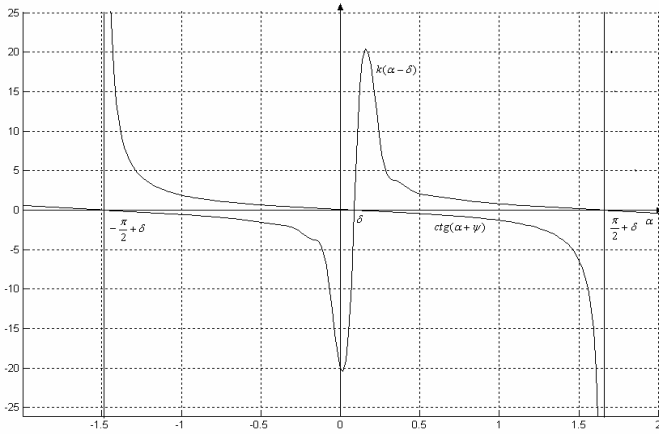


Рис. 8 Первый режим вертикального спуска

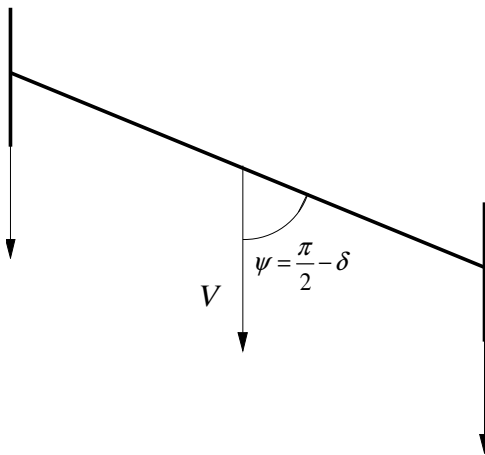


Рис. 9 Первый режим вертикального спуска

Из формулы (7), получим значение установившейся скорости этого простейшего режима. Итак, первый стационарный режим вертикального спуска имеет вид:

$$\gamma_1 = 0, V_1 = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{x0}}}, \text{ где } c_{x0} = c_x(\delta) = c_x(0) \quad (10)$$

Будем уменьшать угол ориентации тела ψ от положения $\frac{\pi}{2} - \delta$. График функции $ctg(\psi + \alpha)$ будет сдвигаться вправо по оси абсцисс, при этом угол α будет увеличиваться от $\alpha = \delta$. При малых изменениях ψ $ctg(\psi + \alpha)$ будет иметь только одну точку пересечения с функцией качества $k(\alpha - \delta)$. Продолжая эти рассуждения, Приведем еще стационарные режимы, изображенные на рисунках 10,11.

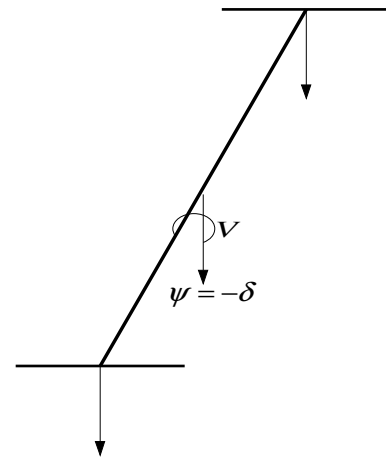


Рис. 11 Второй режим вертикального спуска

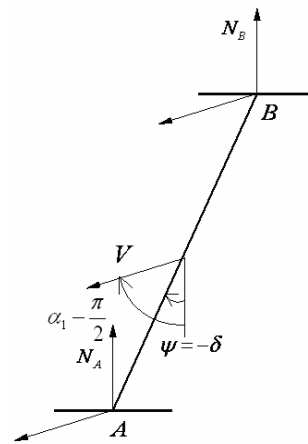


Рис. 12 Режим наибольшего планирования.

Для второго режима вертикального спуска, изображенного на рис. 11 имеем оценки:

$$\gamma_4 = 0, V_4 = \sqrt{\frac{mg}{2s(\frac{\pi}{2} + \delta)}} = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{xm}}} \quad (11)$$

Где $c_{xm} = c_x(\frac{\pi}{2} + \delta)$

Для режима наибольшего планирования, изображенного на рис. 11 имеем оценки:

$$|\gamma_{max}| = |\gamma_6| = \arctg\left(\frac{1}{2} c'_{y0} \sqrt{\frac{1}{c_{x0} c_{x2}}}\right) \quad (12)$$

$$V_6 = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{x0}}} \sqrt{\frac{c_{x0} c_{x2}}{4c_{x0} c_{x2} + (c'_{y0})^2}}$$

Оценка для вертикальной составляющей скорости полученного режима имеет вид:

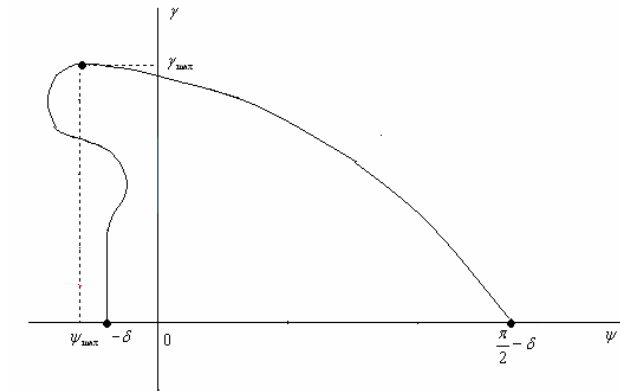
$$V_{y6} = \sqrt{\frac{2mgc_{x2}}{\rho\sigma[4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2]}} \quad (13)$$

Это значение вертикальной составляющей скорости при поступательном движении является минимальным, а угол планирования γ_{max} является максимальным

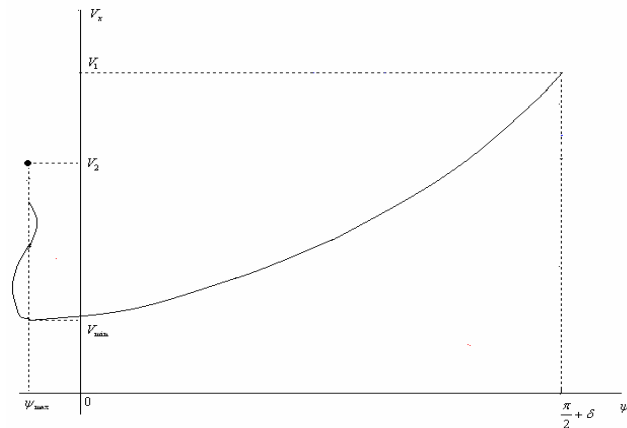
Для тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением $\lambda = 8$, получим: $|\gamma_{max}| \approx 87,1353^{\circ}$,

$$\psi_{max} \approx -0,1153^{\circ}, \alpha_* \approx 5,0060^{\circ}$$

Продолжая эти рассуждения, изобразим графики зависимостей $\gamma = \gamma(\psi)$ и $V = V(\psi)$ (см. рис. 13).



а



б

Рис. 13 Зависимости:

а) $\gamma = \gamma(\psi)$ б) $V = V(\psi)$

Таким образом, любому положению тела можно поставить в соответствие определенный стационарный режим планирования или вертикального спуска, причем множество стационарных режимов, изображенное на рисунке 11 не зависит от массы и размеров тела. Можно сделать вывод, что тело рассматриваемой конфигурации имеет неизолированное множество особых точек. Исследование устойчивости режимов вертикального спуска и планирования по первому приближению проведенное в работах [1], [2] показало, что на всех трех режимах характеристическое уравнение всегда имеет

нулевой корень. Однако при выполнении определенных условий, в характеристических уравнениях появляются корни с положительными вещественными частями, что свидетельствует о неустойчивости рассматриваемых режимов. Для окончательного ответа на вопрос об устойчивости исследованных стационарных режимов требуется рассматривать уравнения в приближениях более высокого порядка.

Таким образом, мы видим, что построенная математическая модель движения описывает весьма интересные и неочевидные стационарные режимы. Эти установившиеся движения были получены в результате проведенного выше графо - аналитического исследования.

IV. ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Будем считать, что тело совершает спуск в режиме авторотации, т.е. $V \ll r\omega$

Аэродинамические функции c_x, c_y разложим в ряд учитывая, что $\alpha, \beta \rightarrow \delta$

$$c_x(\alpha) = c_{x\delta} + c'_{x\delta}(\alpha - \delta), c_y(\alpha) = c_{y\delta} + c'_{y\delta}(\alpha - \delta),$$

$$c_x(\beta) = c_{x\delta} + c'_{x\delta}(\beta - \delta), c_y(\beta) = c_{y\delta} + c'_{y\delta}(\beta - \delta)$$

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{\delta} + \varepsilon'_{\delta}(\alpha - \delta), \varepsilon(\beta) = \varepsilon_{\delta} + \varepsilon'_{\delta}(\beta - \delta)$$

где:

$$c_{x\delta} = c_x(\delta), c'_{x\delta} = c'_x(\delta), c_{y\delta} = c_y(\delta)$$

$$c'_{y\delta} = c'_y(\delta), \varepsilon_{\delta} = \varepsilon(\delta), \varepsilon'_{\delta} = \varepsilon'(\delta)$$

Левые части кинематических соотношений (2) линеаризуем при $\alpha, \beta \rightarrow \delta$

$$V_A(\alpha - \delta) = -V \cos \theta$$

$$V_B(\beta - \delta) = V \cos \theta$$

$$V_A = r\omega - V \sin \theta$$

$$V_B = r\omega + V \sin \theta$$

Пользуясь этими соотношениями, сделаем в уравнениях (1), переход от переменных α, β, V_A, V_B к переменным θ, V, ω . Проведем осреднение полученной системы на отрезке $[0, 2\pi]$.

Осредненная система имеет следующее стационарное решение ω_0, V_0, γ_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2mg \cos \gamma_0}{\rho \sigma (c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2} \delta^2)} \sqrt{\frac{c'_{y0} - c_{x0} - c_{x2} \delta^2}{2c_{x0} + c_{x2} \delta^2}}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2mg \cos \gamma_0}{\rho \sigma (c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2} \delta^2)} \sqrt{\frac{2c_{x0} + c_{x2} \delta^2}{c'_{y0} - c_{x0} - c_{x2} \delta^2}}}$$

$$\gamma_0 = \arctg \left[\frac{2c_{x2} \delta - 3c'_{y0} \delta}{c'_{y0} + 3c_{x0} + c_{x2} 3\delta^2} \right] \quad (14)$$

Коэффициенты $c_{x\delta}, c'_{x\delta}, c_{y\delta}, c'_{y\delta}$ связаны с δ так:

$$c_{x\delta} = c_{x0} + c_{x2}\delta^2, c'_{x\delta} = 2c_{x2}\delta, c_{y\delta} = c'_{y0}\delta, c'_{y\delta} = c'_{y0},$$

$$c_{x0} = c_x(0), c_{x2} = \frac{1}{2}c''_x(0), c'_{y0} = c'_y(0)$$

Режим (14) носит название режима авторотации. При малых δ установившийся угол планирования в режиме авторотации γ_0 пропорционален величине установочного угла пластинок δ . Режим авторотации является притягивающим и он асимптотически устойчив. Математические основы метода осреднения описаны в [8].

V. СРАВНЕНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ СКОРОСТИ РЕЖИМА АВТОРОТАЦИИ СО СКОРОСТЯМИ ДРУГИХ РЕЖИМОВ

Проведем сравнение стационарного значения вертикальной составляющей скорости на режиме авторотации со стационарными значениями вертикальных составляющих скоростей на других установившихся режимах, при которых тело движется поступательно. Установившийся угол планирования в режиме авторотации γ_0 пропорционален величине угла перекоса пластинок δ . Если он достаточно мал, то вертикальная составляющая скорости в первом приближении будет иметь такой же вид, как в формулах (17), определяющих параметры режима авторотации.

$$V_{y0} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\sigma(c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2}\delta^2)}} \sqrt{2(c_{x0} + c_{x2}\delta^2)} <$$

$$< \sqrt{\frac{2mg}{\rho\sigma(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{2c_{x0}}$$

С другой стороны, для минимального значения вертикальной составляющей скорости при поступательном движении в § 2 Главы 1 при помощи первого приближения была получена оценка (13). Таким образом, достаточно сравнить:

$$\sqrt{\frac{1}{(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{2c_{x0}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{c_{x2}}{[4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2]}}$$

Для тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением ($\lambda = 8$), имеем:

$$c_{x0} = 0.01, c''_{x0} \approx 2.6242,$$

$$c_{x2} = \frac{1}{2}c''_{x0} = 1.3121, c'_{y0} = 4.58$$

$$\sqrt{\frac{1}{(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{2c_{x0}} = 0.0379$$

$$\sqrt{\frac{c_{x2}}{[4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2]}} = 0.2498$$

Таким образом, неравенство $V_0 < V_{y6}$ выполнено заведомо, так что вертикальная проекция скорости в режиме авторотации является минимальной по сравнению

с вертикальными составляющими скоростей на других простейших установившихся режимах.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель движения тела.
2. Получены следующие результаты:
 - найдено множество неизолированных установившихся режимов, при которых у тела отсутствует вращение. Показано существование максимального значения угла планирования,
 - найден стационарный режим авторотации. Показана зависимость режима авторотации от аэродинамических характеристик,
 - Сравнение скорости снижения режима авторотации со скоростью спуска в других режимах показало что спуск в режиме авторотации происходит с наименьшей скоростью по сравнению со всеми другими режимами, поэтому данную конструкцию можно использовать как систему спуска в атмосфере.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Беляков Д.В., Самсонов В.А., Филиппов В.В. «Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде». Издательство «МЭИ», журнал «Вестник МЭИ», выпуск № 4 2006 г., стр. 5-10.
- [2] Беляков Д.В. "Исследование и особенности математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде". Издательство «Новые технологии», журнал "Мехатроника, Автоматизация, Управление". Выпуск № 11. 2007 г., стр. 20-24
- [3] Локшин Б.Я. , Привалов В.А., Самсонов В.А. "Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде". Издательство Московского университета. 1992.
- [4] Паршин Д.Е. Самсонов В.А. «Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника.»1992г. (МГУ НИИмеханики, отчет 419).
- [5] Б.Я. Локшин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов «Качественный анализ движения твердого тела в сопротивляющейся среде».Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986 г.
- [6] Табачников В.Г. «Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки.» Труды ЦАГИ 1974 г. выпуск 1621
- [7] Strickland J.N. , Smith T. and Sun K. , "A vortex Model of the Darrious Turbine: An analytical and experimental study", Final Report submitted to Sandia Laboratories on contract # 13-5602, 1982
- [8] Г.И. Шоломович, В.П. Карликов, О.В. Зверев «Исследование по оптимизации ортогональных энергоагрегатов для использования энергии воздушных и водных течений. Оценка влияния кривизны и неоднородности потока на аэродинамические характеристики профиля»,-М.,1990 г.-33 л.(МГУ. НИИмеханики, отчет 3910)
- [9] Paraschivoiu J., "Double Multiple Streamtube model with Recent Improvements", Journal of Energy, vol.7 no.3
- [10] В.Ф. Журавлев Д.М. Климов «Прикладные методы в теории колебаний» Издательство «Наука» 1988 г.

[11] Самсонов В.А. Беляков Д.В. «Оптимизация движения спускающегося авторотирующего тела». Седьмой Международный Аэрокосмический Конгресс IAC'07. Полные доклады. 27-31 августа 2012 г., Москва, Россия. Электронный вид. Регистрационный номер: ISBN 7-85312-056-7

[12] Имитационное моделирование спуска осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде. Девятая Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ образование» 13-15 ноября 2014 г. Сборник трудов стр. 856-864

Mathematical modeling of the motion axisymmetric autorotating bodies in quasistatic to ambience

D.V. Belyakov

Abstract - a work is dedicated to building and study to mathematical model of the motion autorotations bodies to complex deskside in gravity field. The question is Researched about existence beside systems of the equations of the moving the body different stationary mode lowering. It Is Shown existence of the mode autorotation, under which body quickly revolves and realizes the reduction on vertical or tilted direct. At method of the averaging for this mode are received estimations to angular velocity, velocities of the centre of the masses and corner of the deflection of the vector to velocities of the centre of the masses from vertical, is proved that mode autorotation is attracting. Influence is Shown upon deflection of the lowering from vertical by means of change one of the constructive parameter. The Lowering in mode autorotation comes of the least velocity in contrast with the other mode so autorotation - a most-eligible mode for using of this designs as aerodynamic brake device. They Are Executed numerical studies of the moving the body, which are compared with got theoretical estimation, on which possible judge about adequacy offered mathematical model.

Keywords - the body to complex deskside, stationary mode, averaging, mounting corner of the body, mounting corner plate.