

Графы полурешеток, матричные представления полугрупп идемпотентов и полурешетки автомата Ватерлоо

Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, М. Э. Абрамян

Аннотация—Полугруппы являются многочисленным классом алгебр благодаря тому, что в полугруппе обязана выполняться лишь одна аксиома ассоциативности операции. Так, например, полугрупп седьмого порядка насчитывается 836021, а полугрупп восьмого порядка уже 1843120128. Для сравнения, существует всего одна группа порядка семь, 5 групп порядка восемь. Полугруппы малых порядков удобно задавать таблицей Кэли, но и в этом случае получить какое-то представление о структуре полугруппы бывает достаточно сложно. В случае, когда удается получить точное матричное представление полугруппы, структура полугруппы проясняется, так как матрицы – хорошо изученная полугруппа с определенным образом заданной операцией умножения.

Как правило, сразу найти точное матричное представление полугруппы сложно, сначала удобно найти представление этой полугруппы полугруппой преобразований. В этом случае в дальнейшем вместо элементов исходной полугруппы рассматривают соответствующие им преобразования.

В статье рассмотрены полугруппы идемпотентов S , соответствующие им полугруппы преобразований, а также связь рангов этих преобразований с наличием точного матричного представления исходных полугрупп. Так как любая полугруппа идемпотентов является полурешеткой прямоугольных полугрупп, то сначала рассмотрены точные матричные представления конечной полурешетки и произвольной прямоугольной полугруппы, затем описано точное представление полурешетки полугрупп правых нулей в случае, когда правые сдвиги всех элементов такой полугруппы имеют конечный ранг.

Во второй части работы приведены результаты исследования полурешеток на множестве подмножеств гридов автомата Ватерлоо.

Ключевые слова—полугруппа идемпотентов, полурешетка, полугруппа преобразований, точное представление полугрупп, ранг преобразования, недетерминированные конечные автоматы, полурешетки автомата Ватерлоо.

I. ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений полугрупп имеет долгую историю и имеет много содержательных результатов. Основные направления и достижения этой теории связаны

прежде всего с именами Клиффорда, Манна, Понизовского, Окниньского, Путчи.

Началом теории представлений полугрупп считают теорию Клиффорда представлений вполне 0-простых полугрупп [1], а также главу 5 тома 1 монографии Клиффорда и Престона [2]. Именно, Клиффорд показал, как, зная все представления структурной группы вполне 0-простой полугруппы, можно построить все представления этой группы.

Значительных успехов достигла теория неприводимых представлений полугрупп. Конструкция таких представлений предложена в работах Понизовского для конечных полугрупп [3].

Изучение неразложимых представлений – основное содержание современной теории представлений конечномерных алгебр над полями. Классическая теорема Хигмана [4] дает критерий конечности типа представлений конечной группы. Понизовским [5] указан критерий конечности типа представлений конечной коммутативной полугруппы.

При этом условиях существования точного представления у бесконечной полугруппы посвящено лишь небольшое число работ. Связано это с тем, что для большинства классов бесконечных полугрупп сделать это невозможно.

Одним из классов полугрупп, для которых оказалось возможным дать условие существования точного матричного представления, являются связки. Для нашей работы важным является необходимое условие существования точного представления связки. Именно, из известной теоремы Клиффорда о связках и из того, что полугруппа матриц имеет лишь конечное число регулярных D -классов (теорема Окниньского [6]) следует, что если полугруппа идемпотентов имеет точное представление, то она есть полурешетка конечного числа прямоугольных полугрупп.

В первой части статьи рассмотрены полугруппы идемпотентов и их представления полугруппой преобразований. Во второй части приведены результаты исследования полурешеток на множестве подмножеств гридов автомата Ватерлоо.

II. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Приведем основные определения, которые будут использованы.

Элемент x полугруппы называется *идемпотентом*, если $x^2 = x$. Если в полугруппе каждый элемент является идемпотентом, то такую полугруппу называют *полу-*

Статья получена 8 мая 2023.

Лариса Владимировна Зяблицева, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова (email: zlarisav@yandex.ru), Светлана Юрьевна Корабельщикова, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова (email: s.korabelsschikova@narfu.ru)

Михаил Эдуардович Абрамян, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Южный федеральный университет (email: m-abramyan@yandex.ru).

группой идемпотентов (или связкой). Коммутативную связку называют полурешеткой. Если в полугруппе S для любых элементов x и y справедливо равенство $x \cdot y \cdot x = x$, то такую полугруппу называют прямоугольной полугруппой.

Точным представлением полугруппы S называют инъективный гомоморфизм полугруппы в некоторую другую полугруппу U . В случае, если U – это полугруппа преобразований полугруппы S , то его называют точным представлением полугруппы S полугруппой преобразований, если U – это полугруппа матриц конечной размерности, то его называют точным матричным представлением полугруппы S .

Полугруппой преобразований $\mathfrak{S}(S)$ полугруппы S называют любую полугруппу отображений из S в S . Для произвольного преобразования полугруппы рангом преобразования называют мощность множества образов этого преобразования.

В случае полугрупп идемпотентов полезными оказываются полугруппы правых и левых сдвигов элементов этих полугрупп.

Каждому элементу $a \in S$ сопоставляется два преобразования ρ_a, λ_a , переводящие S в S , по правилу:

$$(\forall x \in S) \rho_a(x) = x \cdot a; \lambda_a(x) = a \cdot x.$$

λ_a (ρ_a) называется левым (правым) внутренним сдвигом полугруппы S , соответствующим элементу $a \in S$.

Отображение, сопоставляющее элементу a любой полугруппы его правый сдвиг ρ_a , является гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу преобразований $\mathfrak{S}(S)$ [7].

III. СТРУКТУРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СВЯЗКИ И ТОЧНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЕЕ СТРУКТУРЫ

Известно, что любая связка является полурешеткой прямоугольных полугрупп [7]. Этот факт проясняет общую структуру связки, так как прямоугольные полу-

группы и полурешетки достаточно хорошо изучены, для них существуют простые и наглядные способы описания.

Рассмотрим сначала прямоугольные полугруппы и полурешетки и их точные матричные представления. Начнем с полурешеток.

Термин полурешетка для коммутативной полугруппы идемпотентов обусловлен тем, что любую такую полугруппу можно представить как нижнюю или верхнюю полурешетку в понимании традиционной алгебры. Для этого в такой полугруппе можно следующим образом задать точную нижнюю грань двух элементов x и y : если $x \cdot y = z$, то $z = \inf(x, y)$ (двойственным образом можно задать точную верхнюю грань). В дальнейшем рассматриваются нижние полурешетки.

Любую конечную полурешетку можно представить в виде ориентированного графа, похожего на граф направленного корневого дерева, где вершинами являются элементы полурешетки, а ребро (y, x) существует, если $x \cdot y = x$ и нет такого элемента z , отличного от x и y , что $xz = x$ и $zy = z$. Отличие графа полурешетки от графа корневого дерева в том, что если у построенного графа полурешетки убрать ориентацию ребер, то в полученном графе могут быть циклы [8].

В [9] доказано, что граф полурешетки является деревом тогда и только тогда, когда частичный порядок, заданный формулой: $e \leq f \Leftrightarrow e \cdot f = f \cdot e = e$, является полупорядком снизу. В таблице 1 для полугрупп малых порядков указано их число, а также сколько из них являются полурешетками, сколько полурешеток имеют граф, являющийся деревом.

Из таблицы видно, что процент полурешеток с графом-деревом с увеличением порядка полугрупп уменьшается.

Приведем примеры полурешеток и их графов (рис. 1).

Таблица 1. Число полугрупп малых порядков, полурешеток и полурешеток с графом-деревом.

Порядок полугруппы (n)	Число полугрупп порядка n	Число полурешеток порядка n	Число полурешеток порядка n с графом-деревом
1	1	1	1
2	4	1	1
3	18	2	2
4	126	5	4
5	1160	15	9
6	15973	53	20
7	836 021	222	48
8	1 843 120 128	1078	115

Для двух элементов x и y их произведение равно элементу z , который легко найти с помощью графа. Для этого рассматриваем все цепи, ведущие от верхних вершин к нижней. Если элементы x и y принадлежат какой-нибудь из таких цепей, то произведением элементов будет тот, который расположен ниже. Если же нет цепи, которой одновременно принадлежат оба элемента x и y , то произведение равно элементу z , стоящему на пересечении ребер, идущих вниз от вершин, соответствующих вершинам x и y (этот элемент является точной нижней гранью элементов).

На рисунке 1 приведены примеры полугрупп, граф которых при потере ориентации ребер содержит циклы.

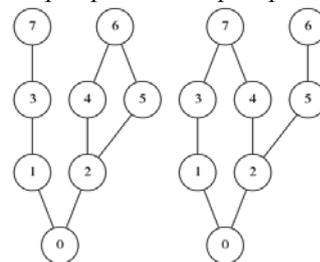


Рисунок 1. Примеры графов полурешеток

Приведем таблицу Кэли полугруппы, соответствующей первому из графов на рисунке 1.

Видим, что на главной диагонали в такой полугруппе стоят элементы, такие же, как в соответствующей строке и столбце, так как это полугруппа идемпотентов. Так

как полугруппа коммутативная, то таблица симметрична относительно главной диагонали. Видим, что элемент 0 в представленной полурешетке является минимальным идеалом.

Таблица 2. Таблица Кэли полурешетки из 8 элементов.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	0	0	2	0	2	2	2	0
3	0	1	0	3	0	0	0	3
4	0	0	2	0	4	2	4	0
5	0	0	2	0	2	5	5	0
6	0	0	2	0	4	5	6	0
7	0	1	0	3	0	0	0	7

Полурешетки – это полугруппы, богатые идеалами: любой элемент любой полурешетки вместе со всеми элементами, лежащими ниже его в графе, соответствующем данной полурешетке, образует идеал этой полугруппы.

Предложение 1. Любая конечная полурешетка имеет точное матричное представление $F: S \rightarrow M_n(P)$, где n – число элементов полурешетки.

Доказательство. Зададим отображение $F: S \rightarrow M_n(P)$ следующим образом.

Далее пронумеруем все элементы полурешетки: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, сопоставим каждой строке матрицы элемент полурешетки с соответствующим номером. Пусть x_i – элемент полурешетки. Сопоставляем ему диагональную матрицу, в которой на диагонали стоят нули и единицы в соответствии с правилом:

$$F(x_i) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_r = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i x_r = x_r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Замечание. Построим граф полурешетки S . Найдем все цепи, идущие от верхних вершин к нижней (нижняя вершина в любой полурешетке единственная). Заметим, что $a_r = 1$, если x_i принадлежит цепи, содержащей элемент x_r , и либо равен ему либо в соответствующем графе элемент x_i расположен выше x_r , иначе $a_r = 0$.

Очевидно, что данное отображение является инъективным.

Покажем, что оно является гомоморфизмом. Рассмотрим представление двух элементов x_i, x_j полурешетки. Их произведением является элемент x_s , где $x_s = \inf(x_i, x_j)$. Образами этих элементов являются диагональные матрицы, построенные в соответствии с заданием отображения F .

Произведение двух диагональных матриц с элементами 1 и 0 на диагонали также является такой матрицей, причем элемент c_r , стоящий на диагонали полученной матрицы, будет равен 1 лишь в том случае, когда оба элемента a_r и b_r каждой матрицы также равны единице. По строению графа, это как раз и означает, что этой

матрице будет соответствовать элемент, равный точной нижней грани исходных элементов полурешетки.

Это означает, что указанное отображение является точным матричным представлением полугруппы S .

Найдем, к примеру, $F(3)$ и $F(6)$ для элементов полугруппы, заданной ранее таблицей 1.

Сопоставим элементам 0,1,2,3,4,5,6,7 полугруппы строки матрицы размерности 8 по правилу: $k \rightarrow k+1$. Элемент 3 находится в единственной цепи: $7 - 3 - 1 - 0$, при этом элементы 0, 1 расположены ниже его. Поэтому

$$F(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично:

$$F(6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(3) F(6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F(0),$$

что соответствует результату таблицы Кэли для произведения элементов 3 и 6.

В предложении 1 рассматриваются только конечные полурешетки, поэтому в любой полугруппе преобразований этой полугруппы ранги этих преобразований конечны.

Рассмотрим далее прямоугольную полугруппу. Известно, что прямоугольная полугруппа изоморфна прямому произведению полугруппы правых нулей ($x \cdot y = y$) и полугруппы левых нулей ($x \cdot y = x$) [10]. Благодаря этому факту прямоугольные полугруппы также получают наглядную интерпретацию: элементы такой полугруппы можно расположить в таблицу (возможно, бесконечную), если число элементов в такой полугруппе бесконечно), при этом при умножении двух элементов x и y в такой таблице результат будет равен элементу z , который находится в той же строке, что элемент x и том же столбце, что элемент y .

Предложение 2. Любая прямоугольная полугруппа S имеет точное представление $F: S \rightarrow M_4(P)$ матрицами над любым полем мощности не менее мощности этой полугруппы.

Доказательство. Расположим элементы прямоугольной полугруппы в таблицу. Каждый элемент расположен в некоторой строке и столбце таблицы. Сопоставим каждой строке и каждому столбцу таблицы различные элементы поля P . Сопоставим каждому элементу полугруппы S пару элементов поля P , которые соответствуют строке и столбцу, в которых расположен данный элемент. Очевидно, что такое отображение является инъективным.

Пусть x, y произвольные элементы полугруппы S , элементу x сопоставляется пара (i, j) элементов поля P , элементу y – пара (k, m) . Тогда $xy = z$, где элементу z сопоставляется пара (i, m) .

Зададим отображение $F: S \rightarrow M_4(P)$ по правилу:

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

(здесь i – элемент, соответствующий строке таблицы, в которой находится x , j – элемент, соответствующий столбцу). Проверим отображение на гомоморфизм:

$$\begin{aligned} F(x)F(y) &= \begin{pmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = F(z). \end{aligned}$$

Поэтому отображение F является точным матричным представлением полугруппы.

Замечание. В предложении 2 полугруппа может быть бесконечной, поэтому в произвольной полугруппе преобразований этой полугруппы ранги этих преобразований могут быть также бесконечными. Но в нашем случае можно воспользоваться тем, что прямоугольная полугруппа изоморфна прямому произведению полугруппы правых нулей и полугруппы левых нулей. Поэтому можно найти отдельно точные матричные представления этих полугрупп, а затем расположить полученные матрицы A и B на диагональ клеточной цы: $\begin{pmatrix} A & \theta \\ \theta & B \end{pmatrix}$.

В качестве преобразований полугруппы правых нулей удобно выбрать правые сдвиги: $(\forall x \in S) \rho_a(x) = x \cdot a = a$, поэтому любой правый сдвиг будет иметь ранг 1, ана-

логично, для полугруппы левых нулей удобно выбрать левые сдвиги, также имеющие ранг 1. В итоге матрицы A и B будут иметь размерность 2, итоговая матрица размерность 4.

IV. ПОЛУРЕШЕТКИ ПОКРЫВАЮЩИХ АВТОМАТОВ ДЛЯ АВТОМАТА ВАТЕРЛОУ

В заключительной части статьи рассматриваются полурешетки, возникающие при исследовании регулярных языков и связанных с ними конечных автоматов. Отметим, что аналогичной проблематике посвящены работы [11–13].

Для описания регулярного языка существуют разные полные инварианты: не только хорошо известные канонические автоматы, но и базисные автоматы [14], а также универсальные автоматы [15]. При построении базисных и универсальных автоматов необходимо построить канонические автоматы как для заданного регулярного языка, так и для его зеркального отражения. В процессе такого построения мы можем получить, среди прочих объектов, специальное бинарное отношение $\#$, определенное на парах состояний этих двух канонических автоматов. Это отношение также является инвариантом (однако неполным) для рассматриваемого языка.

Наиболее интересным для исследования является язык Ватерлоо [16], описываемый автоматом, приведенным на рисунке 2 (данный автомат называется автоматом Ватерлоо).

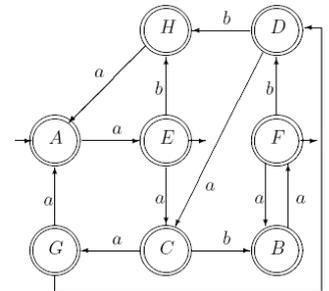


Рисунок 2. Автомат Ватерлоо

Упомянутые выше покрывающие автоматы для любого автомата образуют полурешетку по объединению (если под объединением покрывающих автоматов понимать покрывающий автомат, построенный по объединению наборов гридов, связанных с исходными автоматами). Однако можно показать (соответствующий пример будет приведен ниже), что покрывающие автоматы, вообще говоря, не образуют полурешетки по пересечению, понимаемого в том же смысле, что и объединение.

В данной части статьи приводятся некоторые результаты, полученные при исследовании полурешеток покрывающих автоматов для языка Ватерлоо. Результаты связаны с проблемой разработки эффективных алгоритмов минимизации недетерминированных конечных автоматов. Исследование проводилось с применением библиотеки для работы с недетерминированными конечными автоматами NFALib, реализованной одним из авторов на языке C# [17].

Вначале уточним ряд уже упомянутых понятий, связанных с теорией недетерминированных конечных автоматов. В качестве иллюстрации вводимых понятий будем приводить примеры, соответствующие автомату

Ватерлоо.

Рассмотренный в [18; разд. 6] алгоритм вершинной минимизации недетерминированных конечных автоматов основан на анализе бинарного отношения $\#$ [18; разд. 3.3], связывающего множества состояний X и Y двух канонических автоматов, которые построены на основе анализируемого недетерминированного конечного автомата K (определяющего некоторый регулярный язык L) и зеркального к нему. Следует отметить, что канонический автомат для (детерминированного) автомата Ватерлоо не изменяет его. Не указывая вид канонического автомата к зеркальному автомату Ватерлоо (отметим лишь, что его состояния обозначаются буквами $X, Y, Z, U, V, W, P, Q, R, S$), сразу приведем матрицу бинарного отношения $\#$:

	X	Y	Z	U	V	W	P	Q	R	S
A	-	#	-	-	-	-	-	#	-	-
B	-	#	-	-	#	-	-	-	-	-
C	-	-	-	#	#	-	-	-	-	-
D	-	-	-	-	-	#	#	-	-	-
E	#	-	-	-	-	#	#	-	-	-
F	#	-	#	-	-	-	#	-	#	-
G	-	-	#	-	-	-	-	-	#	#
H	-	-	#	-	-	-	-	-	-	#

С отношением $\#$ связывается набор *гридов* [18; разд. 3.4]. Каждый грид определяется парой подмножеств $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, удовлетворяющих следующему условию: для любых состояний $x \in X_0$ и $y \in Y_0$ выполняется $x \# y$, причем подмножества X_0 и Y_0 нельзя расширить с сохранением указанного условия. Такой грид будем обозначать $X_0 \times Y_0$.

Множество M гридов называется *покрывающим*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ таких, что $x \# y$, найдется грид $X_0 \times Y_0$ из M , для которого $x \in X_0$ и $y \in Y_0$. Очевидно, что полный набор гридов, построенных по отображению $\#$, является покрывающим множеством. Приведем полное множество M гридов для автомата Ватерлоо (гриды пронумерованы от 1 до 14):

- { A } \times { Y, Q } % 1
- { A, B } \times { Y } % 2
- { B } \times { Y, V } % 3
- { B, C } \times { V } % 4
- { C } \times { U, V } % 5
- { D, E } \times { W, P } % 6
- { E } \times { X, W, P } % 7
- { E, F } \times { X, P } % 8
- { F } \times { X, Z, P, R } % 9
- { F, G } \times { Z, R } % 10
- { G } \times { Z, R, S } % 11
- { G, H } \times { Z, S } % 12
- { F, G, H } \times { Z } % 13
- { D, E, F } \times { P } % 14

В [15] описан алгоритм построения по полному множеству гридов автомата $\text{COM}(L)$, который определяет тот же регулярный язык L , что и исходный автомат K , и при этом каждый грид соответствует некоторому состоянию автомата $\text{COM}(L)$.

На основе автомата $\text{COM}(L)$ можно определить семейство *покрывающих автоматов*, каждый из которых получается путем удаления некоторых состояний автомата $\text{COM}(L)$, причем оставшиеся состояния соответствуют градам, образующим покрывающее множество.

Алгоритм минимизации исходного автомата K состо-

ит в том, чтобы выбрать покрывающее множество гридов M_0 минимального размера, для которого построенный на его основе покрывающий автомат является эквивалентным автомату K , т. е. определяет тот же регулярный язык.

Однако не всякое покрывающее множество гридов позволяет получить покрывающий автомат, эквивалентный исходному, и именно автомат Ватерлоо демонстрирует подобную ситуацию. Минимальное покрывающее множество M_0 гридов для автомата Ватерлоо содержит гриды 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12. При построении покрывающего автомата для множества M_0 , последующей канонизации этого автомата и переименовании его состояний, мы получаем автомат, *неэквивалентный* исходному автомату Ватерлоо.

Возникает вопрос о том, какими свойствами обладают другие покрывающие автоматы, которые могут быть построены на основе минимального покрывающего множества гридов M_0 , дополненного какими-либо другими гридами из исходного полного множества M .

Очевидно, описанное подмножество покрывающих множеств гридов является полурешеткой как по объединению, так и по пересечению. Очевидно также, что множество *всех* покрывающих множеств гридов образует *полурешетку по объединению* (так как объединение двух покрывающих множеств, естественно, является покрывающим). Однако полурешетку по пересечению множества *всех* покрывающих множеств гридов не образует. Для доказательства этого факта достаточно отметить, что имеется покрывающее множество гридов $M' = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$, пересечение которого с минимальным покрывающим множеством M_0 дает множество $\{1, 5, 6, 8, 10, 12\}$, которое не является покрывающим (поскольку его размер меньше размера минимального покрывающего множества M_0). Разумеется по множеству M' также можно построить полурешетку покрывающих множеств по объединению и по пересечению, однако она будет отличаться от полурешетки, построенной по множеству M_0 . Таким образом, можно сказать, что множество *всех* покрывающих множеств гридов является *объединением полурешеток по пересечению*.

Исследование различных полурешеток по пересечению для множества *всех* покрывающих множеств гридов автомата Ватерлоо представляет собой дополнительную задачу, однако в данной статье мы ограничимся рассмотрением единственной полурешетки, порожденной минимальным покрывающим множеством гридов M_0 . В эту полурешетку входят покрывающие множества, полученные из множества M_0 добавлением в него любой комбинации множеств из дополнительного набора гридов (размера 7), содержащего гриды 2, 4, 7, 9, 11, 13, 14.

Очевидно, полученная полурешетка представляет собой 7-мерный гиперкуб с 128 вершинами. Каждая вершина соответствует некоторому покрывающему множеству или, что то же самое, покрывающему автомату, построенному по этому множеству. При этом «начальная» вершина гиперкуба соответствует начальному множеству M_0 (не содержащему дополнительных гридов), а «конечная» – полному множеству M , содержащему весь набор гридов.

Все 128 полученных покрывающих автоматов были исследованы на эквивалентность исходному автомату Ватерлоо, а также на попарную эквивалентность. Оказалось, что данная полурешетка содержит четыре множе-

ства попарно эквивалентных между собой покрывающих автоматов. Результаты анализа приведены в графическом виде на рисунке 3.

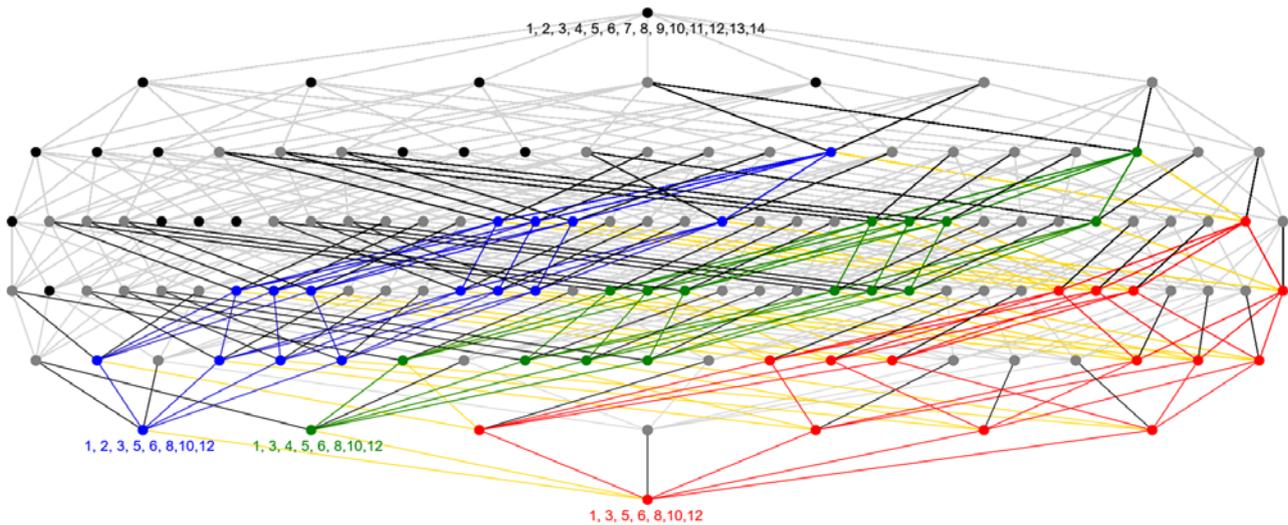


Рисунок 3. Полурешетка, построенная по множеству M_0

Вершины изображенного графа соответствуют различным покрывающим множествам гридов (т. е. вершинам гиперкуба), а ребра соединяют соседние вершины гиперкуба (отличающиеся ровно на один грид, входящий в большее множество). Каждый ряд вершин на рисунке соответствует множествам с одинаковым количеством гридов (от 7 – единственная вершина в нижнем ряду, соответствующая множеству M_0 , до 14 – единственная вершина в верхнем ряду, соответствующая полному множеству M). Покрывающие множества в каждом ряду расположены в лексикографическом порядке входящих в них номеров гридов. Например, второй снизу ряд (содержащий множества размера 8) включает следующие множества (слева направо):

- $$M_1 = \{1, \mathbf{2}, 3, 5, 6, 8, 10, 12\},$$
- $$M_2 = \{1, 3, \mathbf{4}, 5, 6, 8, 10, 12\},$$
- $$M_3 = \{1, 3, 5, 6, \mathbf{7}, 8, 10, 12\},$$
- $$M_4 = \{1, 3, 5, 6, 8, \mathbf{9}, 10, 12\},$$
- $$M_5 = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, \mathbf{11}, 12\},$$
- $$M_6 = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \mathbf{13}\},$$
- $$M_7 = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \mathbf{14}\}$$

(в списке гридов выделен полужирным шрифтом и подчеркиванием дополнительный грид, добавленный к основному покрывающему набору M_0).

Вершины, соответствующие попарно эквивалентным покрывающим автоматам, которые *не эквивалентны* исходному автомату Ватерлоо, выделены одинаковым цветом (красным, синим или зеленым). Таким образом, имеются три набора автоматов, эквивалентных между собой и не эквивалентных автомату Ватерлоо: набор, начинающийся с покрывающего автомата, соответствующего множеству M_0 ; набор, начинающийся с автомата, соответствующего множеству M_1 ; набор, начинающийся с автомата, соответствующего множеству M_2 . Каждый из них содержит по 16 элементов, образующих 4-мерные гиперкубы. Ребра, соединяющие неэквивалентные автоматы из этих трех наборов, изображены жел-

тым цветом.

Дополнительный интерес представляет переход от покрывающих автоматов, не эквивалентных автомату Ватерлоо, к автоматам, которые ему эквивалентны. Такие ребра изображены черным цветом (их количество равно 80), а связанные с ними автоматы, эквивалентные автомату Ватерлоо, изображены серыми кружками (эти автоматы образуют четыре 4-мерных гиперкуба). Таким образом ребра черного цвета соответствуют *границе гиперкуба*, разделяющей автоматы, эквивалентные автомату Ватерлоо, и автоматы, не эквивалентные ему.

Черным цветом изображены также вершины, соответствующие покрывающим автоматам, эквивалентным автомату Ватерлоо, которые *не связаны* ребрами с неэквивалентными им покрывающими автоматами; одним из них, в частности, является автомат СОМ, расположенный в верхнем ряду; этот набор автоматов образует 4-мерный гиперкуб, связанный ребрами с тремя из четырех «серых» гиперкубов.

Минимальный покрывающий автомат, эквивалентный автомату Ватерлоо, можно получить, добавив к минимальному покрывающему множеству гридов дополнительный грид 9 и получив при этом множество M_4 из 8 элементов (на рисунке 3 этот автомат изображен во втором ряду снизу непосредственно над минимальным покрывающим автоматом; это единственный автомат второго ряда, эквивалентный автомату Ватерлоо). Следует отметить, что существуют и другие покрывающие автоматы, эквивалентные автомату Ватерлоо и построенные по покрывающему множеству из 8 гридов, однако они входят в другие полурешетки покрывающих автоматов, которые в данной статье не рассматриваются.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дальнейшем предполагается продолжить исследование точных матричных представлений и, в частности, показать, что не любая полугруппа преобразований по-

лугруппы, состоящая из преобразований конечного ранга, имеет точное матричное представление, а также что аналогичный факт отсутствия точного матричного представления имеет мест для любых бесконечных полурешеток,

Продолжением исследования, описанного во второй части статьи, является рассмотрение полного набора полурешеток покрывающих автоматов, которое позволит выявить дополнительные закономерности, связанные с автоматом Ватерлоо.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Clifford A. Matrix representation of completely simple semigroups // Amer.J.Math. 1942. Vol. 64. P. 327–342.
- [2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т.1,2. М.: Мир, 1972.
- [3] Понизовский И.С. О неприводимых матричных представлениях конечных ассоциативных систем // Уч. зап. Кемер. пед. ин-та. 1956. Вып. 1 С. 245–250.
- [4] Higman D. Indecomposable representations of completely simple semigroups // Amer.J.Math. 1954. Vol. 21. P. 377–381.
- [5] Понизовский И.С. О матричных представлениях конечных коммутативных полугрупп. // Сиб. мат. журнал. 1970. Т. XI. С. 1098–1106.
- [6] Okninski J. Linear representation of semigroups // Proc. Berkeley Workshop on Monoids, 1991. P. 563–581.
- [7] Общая алгебра. Том 2 / Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. и др. М.: Наука, Физматлит, 1991.
- [8] Зяблицева Л.В., Корабельщикова С.Ю., Попов И.Н. Некоторые специальные полугруппы и их гомоморфизмы. Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013.
- [9] Зяблицева Л.В., Пестов С.А. Алгоритм проверки изоморфизма полурешеток с использованием инвариантов теории графов // Arctic Environmental Research, 2017. С. 368–375.
- [10] Данг В.В., Додонова Н.Л., Корабельщикова С.Ю., Мельников Б.Ф. SH-слабая двойственность полугрупп и минимальная полугруппа SH-аппроксимации // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 1 (49). С. 29–39/
- [11] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть I. Извлечение корня из языка // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Т. 10. № 4. С. 1–9.
- [12] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть II. Построение инверсного морфизма // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Т. 10. № 5. С. 1–8.
- [13] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть III. Условие существования решётки // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Т. 10. № 7. С. 1–9.
- [14] Долгов В., Мельников Б., Мельникова А. Циклы графа переходов базисного конечного автомата и связанные вопросы // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 4. С. 95–111.
- [15] Долгов В., Мельников Б. Построение универсального конечного автомата. II. Примеры работы алгоритмов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 78–85.
- [16] Kameda T., Weiner P. On the state minimization of nondeterministic finite automata. IEEE Transactions on Computers. 1970. Vol. C-19. No. 7. P.617–627.
- [17] Абрамян М.Э. О вычислении веса подзадач при вершинной минимизации недетерминированных конечных автоматов методом ветвей и границ // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2 (58). С. 46–52. doi:10.21685/2072-3040-2021-2-4
- [18] Мельников Б. Регулярные языки и недетерминированные конечные автоматы. М.: Изд-во Российского государственного социального университета, 2018.

Лариса Владимировна ЗЯБЛИЦЕВА,
доцент Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (<http://narfu.ru/>),
email: zlarisav@yandex.ru,
mathnet.ru: personid= 188633,
elibrary.ru: authorid= 328933,

Светлана Юрьевна КОРАБЕЛЬЩИКОВА,
доцент Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (<http://narfu.ru/>),
email: s.korabelsschikova@narfu.ru,
mathnet.ru: personid= 188634,
elibrary.ru: authorid=711810,
scopus.com: authorId=57204497626,
ORCID: orcidID=0000-0001-6142-7815.

Михаил Эдуардович АБРАМЯН,
доцент университета МГУ – ППИ в Шэньчжэне (<http://szmsubit.ru/>),
доцент Южного федерального университета, Ростов-на-Дону (<http://sfedu.ru/>),
email: m-abramyan@yandex.ru,
mathnet.ru: personid=20226,
elibrary.ru: authorid=17911,
scopus.com: authorId=8291167000,
ORCID: orcidID=0000-0002-2802-6144.

Semilattice graphs, matrix representations of idempotent semigroups and Waterloo automaton semilattices

L. V. Zyablitseva, S. Yu. Korabelshchikova, M. E. Abramyan

Abstract—Semigroups are a numerous class of algebras due to the fact that only one axiom of associativity of an operation must hold in a semigroup. So, for example, there are 836021 semigroups of the seventh order, and already 1843120128 semigroups of the eighth order. For comparison, there is only one group of order seven, 5 groups of order eight. It is convenient to define semigroups of small orders by the Cayley table, but even in this case it can be quite difficult to get some idea of the structure of the semigroup. In the case when it is possible to obtain an exact matrix representation of a semigroup, the structure of the semigroup becomes clear, since matrices are a well-studied semigroup with a multiplication operation defined in a certain way.

As a rule, it is difficult to find the exact matrix representation of a semigroup; first, it is convenient to find a representation of this semigroup by a transformation semigroup. In this case, in what follows, instead of the elements of the original semigroup, we consider the corresponding transformations.

The article considers the semigroups of idempotents S , the corresponding semigroups of transformations, as well as the connection between the ranks of these transformations and the presence of an exact matrix representation of the original semigroups. Since any semigroup of idempotents is a semilattice of rectangular semigroups, we first consider the exact matrix representations of a finite semilattice and an arbitrary rectangular semigroup, then describe the exact representation of the semilattice of right zero semigroups in the case when the right shifts of all elements of such a semigroup have a finite rank.

The second part of this paper presents the results of a study of semilattices on a set of grid subsets of the Waterloo automaton.

Keywords—semigroup of idempotents, semilattice, semigroup of transformations, exact representation of semigroups, rank of transformation, nondeterministic finite automata, semilattices of the Waterloo automaton.

REFERENCES

- [1] Clifford A. Matrix representation of completely simple semigroups // Amer.J.Math. 1942. Vol. 64. P. 327–342.
- [2] Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups. Vol.1,2. Providence: Amer. Math. Soc., 1967.
- [3] Ponizovsky I.S. On irreducible matrix representations of finite associative systems // Proceedings of Kemer. ped. institute. 1956. Vol. 1. P. 245–250 (in Russian).
- [4] Higman D. Indecomposable representations of completely simple semigroups // Amer.J.Math. 1954. Vol. 21. P. 377–381.
- [5] Ponizovsky I.S. On matrix representations of finite commutative semigroups. // Sib. Math. J. 1970. Vol. XI. P. 1098–1106 (in Russian).
- [6] Okninski J. Linear representation of semigroups // Proc. Berkeley Workshop on Monoids. 1991. P. 563–581.
- [7] Abstract algebra. Vol. 2 / Artamonov V.A., Saliy V.N., Skorniyakov L.A. et al. Moscow: Nauka Publ., Phizmatlit, 1991 (in Russian).
- [8] Zyablitseva L.V., Korabelshchikova S.Yu., Popov I.N. Some special semigroups and their homomorphisms. Arkhangelsk: NArFu Publ., 2013 (in Russian).
- [9] Zyablitseva L.V., Pestov S.A. Algorithm for checking isomorphism of semilattices using graph theory invariants // Arctic Environmental Research. 2017. P. 368–375 (in Russian).
- [10] Dang V.V., Dodonova N.L., Korabelshchikova S.Yu., Melnikov B.F. SH-weak duality of semigroups and minimum semigroup of SH-approximation // University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2019. No. 1 (49). P. 29–39 (in Russian).
- [11] Melnikov B.F. Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part I. Extracting the root from the language // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Vol. 10. No. 4. P. 1–9 (in Russian).
- [12] Melnikov B.F. Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part II. Constructing an inverse morphism // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Vol. 10. No 5. P. 1–8 (in Russian).
- [13] Melnikov B.F. Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part III. The condition for the existence of a lattice // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Vol. 10. No. 7. P. 1–9 (in Russian).
- [14] Dolgov V., Melnikov B., Melnikova A. The loops of the basis finite automaton and the connected questions // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2016. No. 4. P. 95–111 (in Russian).
- [15] Dolgov V., Malnikov B. Construction of universal finite automaton. II. Examples of algorithms functioning // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2014. No. 1. P. 78–85 (in Russian).
- [16] Kameda T., Weiner P. On the state minimization of nondeterministic finite automata. IEEE Transactions on Computers. 1970. Vol. C-19. No. 7. P.617–627.
- [17] Abramyan M.E. Computing the weight of subtasks in state minimization of nondeterministic finite automata by the branch and bound method // University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021. No. 2 (58). P. 46–52 (in Russian). doi:10.21685/2072-3040-2021-2-4
- [18] Melnikov B.F. Regular languages and nondeterministic finite automata: a monograph. – M. : RGSU Publ., 2018 (in Russian).

Larisa Vladimirovna ZYABLITCEVA,
Associate Professor of Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (<http://narfu.ru/>),
email: zlarisav@yandex.ru, mathnet.ru: personid= 188633,
elibrary.ru: authorid= 328933,

Svetlana Yurievna KORABELSHCHIKOVA,
Associate Professor of Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (<http://narfu.ru/>),
email: s.korabelsschikova@narfu.ru, mathnet.ru: personid= 188634, elibrary.ru: authorid=711810,
scopus.com: authorId=57204497626, ORCID: orcidID=0000-0001-6142-7815.

Mikhail Eduardovich ABRAMYAN,
Associate Professor of Shenzhen MSU – BIT University, China (<http://szmsubit.ru/>),
Associate Professor of Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia (<http://sfedu.ru/>), email: m-abramyan@yandex.ru, mathnet.ru: personid=20226, elibrary.ru: authorid=17911,
scopus.com: authorId=8291167000, ORCID: orcidID=0000-0002-2802-6144.