“Многомерное метро” и символьные матрицы

Г.Г. Рябов, В.А. Серов

Аннотация—**Рассматриваются комплексы k-мерных граней (k-граней) n-куба, представленные в виде символьных матриц над конечным алфавитом $A' = \{\varnothing, 0, 1, 2\}$. Изучается классификация кратчайших k-мерных путей (k-путей) в n-кубе на базе введенного числового инварианта для символьных матриц. Предложен алгоритм “решета” для генерации представителей всех классов k-путей в n-кубе.**

Ключевые слова—**Биективное отображение, конечный алфавит, кубанты, метрика Хаусдорфа-Хэмминга, символьные матрицы, k-грани n-куба, k-пути и их классификация по разбиениям для числа символов.**

I. Введение

Тенденция все большего усложнения структур, используемых в современных информационных технологиях, делает актуальными решения задач отображения таких структур на более “регулярные” хотя и, возможно, более структурно избыточные. Под термином “регулярные” здесь подразумеваются структуры с большим числом симметрий и, как правило, поэтому удобно алгебраически представимые для исследования, вычисления и использования их топологических и комбинаторных свойств. Классическим примером такой регулярной, универсальной структуры является n-куб [1]. Цель данной статьи — дать представление о математическом инструментарии, связывающем методы теории представлений, алгебраической топологии и перечислительной комбинаторики. Такой инструментарий рассчитан на исследования комплексов k-мерных граней (k-граней) в n-кубе, биективно представленных в виде символьных матриц над конечным алфавитом.

Определенный крен, сделанный в изложении, преследует две цели:

1. Попытаться кратко дать логически последовательное для читателя представление развития описываемого инструментария.
2. Попытаться дать наглядное (насколько это возможно) сопоставление конкретных символьных представлений и многомерных примеров с комплексами из k-граней в их графической интерпретации на плоской проекции одномерного остова (вершины и ребра) аффинного образа n-куба.

В начале изложения остановимся на пояснении некоторых особенностей используемой графической интерпретации n-куба и его граней. Так, на рис.1а) изображено графическое представление 3-куба в стиле диаграмм Хассе [2]. Будет применяться графический подход, изображающий плоскую проекцию вершин и ребер (одномерный остов) n-куба, построение которой опирается на заданный репер, как это показано на рис.1б) для 9-куба. Такая графика будет использована только для демонстрации самых общих идей топологического характера рассматриваемых структур, а все числовые характеристики (степени вершин в комплексах граней, метрика между гранями и т.д.) рассчитываются алгебраически на основе биективного представления.

В статье выбрана несколько необычная форма изложения в рамках рассмотрения задачи, которая имеет естественные ассоциации с реальными задачами решения транспортного коллапса в мегаполисах настоящего и будущего. Условно назовем такую задачу “проектирование многомерного метро”. С целью еще большего ассоциирования с окружающей геометрией реального метро будут рассмотрены примеры для еще более узкой постановки “трехмерное метро в 9-кубе”.

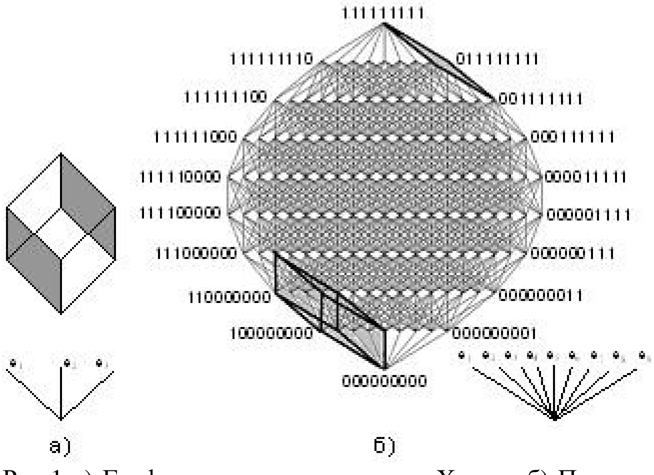


Рис.1 а) Графика в стиле диаграммы Хассе. б) Плоская проекция одномерного остова 9-куба, используемая в статье.

Неформальная постановка задачи: Линии метро в n-кубе рассматриваются как сеть тоннелей, составленных из k-граней, которые примыкают друг к другу своими (k-1)-гранями. Станции заданы как набор вершин n-куба (в основном внимание будет уделено случаю пары

Статья получена 22 ноября 2014.

Г. Г. Рябов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия (e-mail: gen-ryabov@yandex.ru).

В. А. Серов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

антиподальных вершин, т.е. вершин v_1 и v_2, с максимальным хэмминговым расстоянием $\rho_H(v_1, v_2) = n$). Ограничениями могут служить грани, запретные для прохождения тоннелей, а также метрические ограничения на взаимное расположение тоннелей разных линий. Общая идея грубо изображена на рис.2 для соединения антиподальных вершин (а.п. вершин) $<00\ldots0>$ и $<11\ldots1>$.

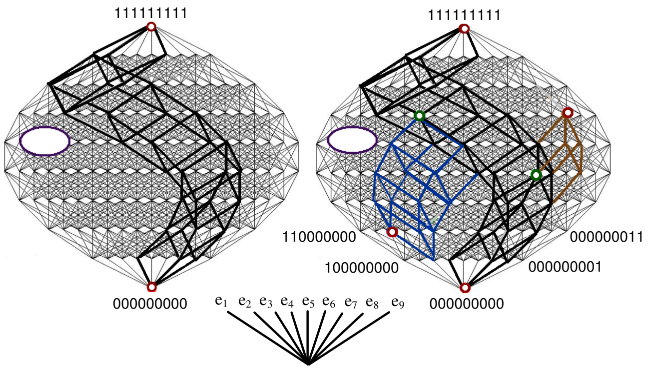


Рис.2 Общая идея “многомерного метро”. Пустой овал условно соответствует запретным граням.

Из этих неформальных рассуждений уже следует перечень основных требований к математическому инструментарию:

– Индивидуальное представление каждой k-грани n-куба.
– Методы числовой оценки взаимного расположения граней всех размерностей (в т.ч. метрические соотношения).
– Индивидуальное представление любого комплекса граней в n-кубе.
– Методы числовой оценки взаимного расположения комплексов в n-кубе.
– Методы исследования комбинаторного наполнения путем классификации комплексов на базе числовых инвариантов.

Сразу же укажем пути реализации этих требований:

1. Каждая k-грань будет биективно (взаимно однозначно) представлена n-разрядным (символьным) словом (*кубантом*) над троичным алфавитом $A = \{0,1,2\}$.
2. Над троичными словами вместе с расширением алфавита до $A' = \{\varnothing, 0,1,2\}$ вводятся поразрядные операции, с помощью которых вычисляются пересечения граней, выпуклая оболочка граней и величина минимального пути (по ребрам) между гранями. На базе этого вводится метрика Хаусдорфа-Хэмминга на всех гранях n-куба, которая является естественным расширением метрики Хэмминга для вершин.
3. Каждый комплекс граней в n-кубе представлен символьной матрицей, строками которой являются кубанты. На базе такого матричного представления (с введением дополнительных условий) дается определение кратчайшего k-мерного пути (k-пути) в n-кубе.
4. Методы оценки взаимного расположения комплексов опираются на методы п.2.
5. Вводится числовой инвариант для символьных матриц, представляющих k-путь. Он позволяет классифицировать все матрицы в соответствии с разбиениями числа символов в матрице при определенных ограничениях на такие разбиения.

В целом, содержание представленной статьи следует в русле фундаментальных работ Рота, Стенли, Манина, Эндрюса, Вершика, Окунькова [1-5].

II. Биективное представление k-граней n-куба

В основе дальнейшего изложения лежит биекция для k-граней n-куба, предложенная в [6].

Пусть $B = \{0, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ —репер в $\mathbb{R}^n$; $A = \{0,1,2\}$ — алфавит и $A_n^* = \{< d_1, \ldots, d_n >\}, d_i \in A$ — множество всех n-разрядных слов (кубантов) над этим алфавитом. Слово этого множества обозначается как $D =< d_1, \ldots, d_n >$. Каждая k-грань n-куба (f_{nk}) представляется как декартово произведение ($\prod$) единичных отрезков $\mathbf{I}(\mathbf{e_i})$ для базисных векторов $\mathbf{e_i} \in B_1 \subset B$ и трансляции (T) вдоль остальных базисных векторов так, что $\mathbf{e_j} \in B_2 \subset B (B_2 = B \setminus B_1)$.

На основании этого можно записать наше представление как:

$$f_{nk}(B_1, B_2) = \prod_k \mathbf{I}(\mathbf{e_i}) + \mathop{\mathrm{T}}_{n-k}(\mathbf{e_j}) \xleftrightarrow{[1:1]} < d_1, \ldots, d_n >, \qquad (1)$$

где $d_i = 2$ для $\mathbf{e_i} \in B_1$ и $d_j \in \{0,1\}$ для $\mathbf{e_j} \in B_2$.

$d_j = 1$ при наличии трансляции вдоль $\mathbf{e_j}$ и $d_j = 0$ при ее отсутствии.

Другими словами, можно рассматривать такую запись как в специальной позиционной (поразрядной) системе для отображения двух действий — декартового произведения и трансляции. Символ в i-ом разряде кубанта показывает как используется единичный отрезок $\mathbf{I}(\mathbf{e_i})$, коллинеарный $\mathbf{e_i}$. А именно, “2”—участие $\mathbf{I}(\mathbf{e_i})$ в декартовом произведении, “1”—участие в параллельном переносе (трансляции) вдоль $\mathbf{e_i}$, “0” — отсутствие трансляции вдоль $\mathbf{e_i}$. Так, кубант $D =< 020201201 >$ соответствует трехмерной грани с декартовым произведением $\prod(\mathbf{I}(\mathbf{e}_2), \mathbf{I}(\mathbf{e}_4), \mathbf{I}(\mathbf{e}_7))$ и трансляцией вдоль $\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_9$. При таком представлении традиционная двоичная кодировка вершин n-куба сохраняется.

Примеры графической интерпретации можно видеть на рис.1

Дополнив символом $\varnothing$ принятый алфавит A ($A' = \{\varnothing, 0,1,2\}$), вводятся поразрядные операции на кубантах. Список основных операций (поразрядных) и правила их выполнения приведены ниже.

1. $\#(a)D$ —число символов “a” в кубанте D.
2. $\neg D$—кубант грани, антиподальной к исходной (замена в кубанте D всех “0” на “1” и всех “1” на “0”).

3. $D_1 + D_2$ —сложение (объединение) кубантов (таблица 1). Результат—кубант грани, выпуклой оболочки исходных.

4. $D_1 \times D_2$ —умножение (пересечение) кубантов (таблица 2). Результат— кубант общей грани для исходных.

Таблица 1

+	∅	0	1	2
∅	∅	0	1	2
0	0	0	2	2
1	1	2	1	2
2	2	2	2	2

Таблица 2

×	∅	0	1	2
∅	∅	∅	∅	∅
0	∅	0	∅	0
1	∅	∅	1	1
2	∅	0	1	2

Легко видеть, что длина минимального пути по ребрам между гранями с кубантами D_1 и D_2 равна $L_{\min}(D_1, D_2) = \#(\varnothing)(D_1 \times D_2)$;

Графическая интерпретация операций показана на рис.3.

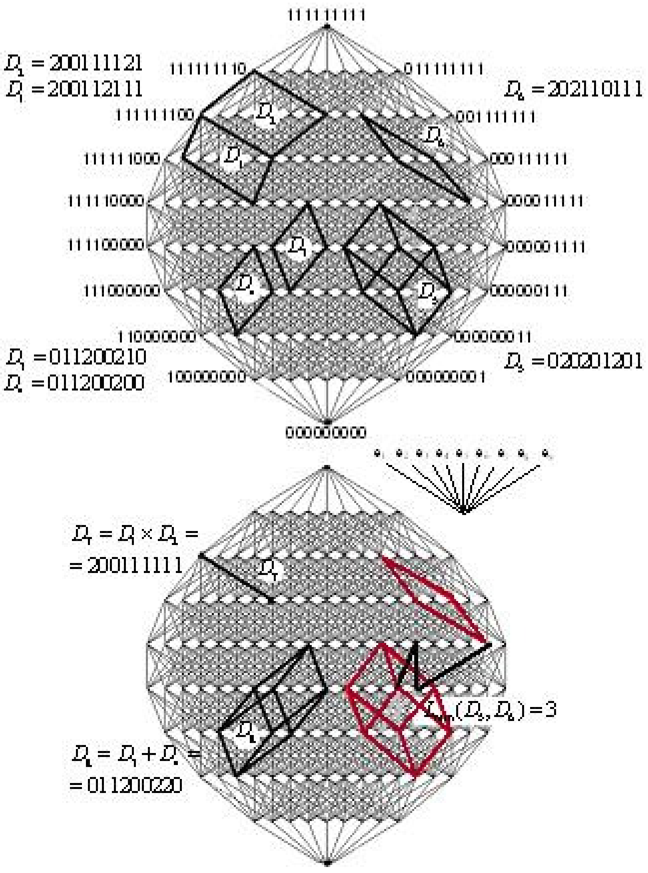


Рис.3 Кубанты. Операции над ними в проекции 9-куба.

В [7] на базе (1) и учитывая выпуклость любых k-граней была введена метрика Хаусдорфа на гранях n-куба, которая является обобщением метрики Хэмминга. Предложен алгоритм ее вычисления с помощью кубантов. Для этого вводится специальная бинарная операция $\mu(D_1 / D_2)$.

5. $\mu(D_1 / D_2)$. Замена символов “2” на “0” в тех разрядах d_{1i} кубанта D_1, для которых $d_{2i} = 1$, и “2” на “1”, для которых $d_{2i} = 0$. Результат—кубант D_3 со свойствами $D_3 \in D_1$ и $\#(\varnothing)(D_3 \times D_2) = \max(L_{\min}(D_3, D_2))$.

Отсюда:

$\rho_{HH}(D_1, D_2) = \max\{\#(\varnothing)(\mu(D_1 / D_2) \times D_2);$
$\#(\varnothing)(\mu(D_2 / D_1) \times D_1)\}$

Таким образом, все 3^n граней n-куба образуют конечное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа-Хэмминга. В частности, для кубантов D_4 и D_5 (рис.3) $\rho_{HH}(D_4, D_5) = 6$;

III. Символьные матрицы

Исследование свойств некоторого множества граней n-куба естественно рассматривать в форме биективного представления этих граней в виде кубантов. Пусть число граней (кубантов) в таком множестве равно s. Тогда, считая каждый кубант одной из строк в матрице из s строк, можно говорить о биективном представлении комплекса граней в виде троичной символьной $n \times s$ матрицы (вопрос о порядке следования строк пока оставим в стороне). Возвращаясь к задаче прокладки тоннелей “трехмерного метро в 9-кубе” между станциями $v_1 = 00...0$ и $v_2 = 11...1$, легко представить примеры соответствующих символьных 9×7 матриц, как это показано ниже. Отметим основные свойства (*свойства 1- 4*) таких матриц:

1. $< 00\ldots0 > \in D_1$, $< 11\ldots1 > \in D_7$ (как станции назначения).
2. Размерности всех граней в тоннеле равны 3, т.е. $\#(2)D_i = 3, i = 1 \div 7$.
3. Для соседних граней условие стыковки (2) $\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = 2$ (размерность гиперграней).
4. Требование кратчайшего тоннеля (по числу входящих в него граней) приводит к свойству, что столбцы матрицы $D_j^*, j = 1 \div 9$ имеют вид только 4-х типов:
    1) из всех “2”.
    2) из “2” и следующих за ними только “1”.
    3) из “0” и следующих за ними только “2”.
    4) из “0” и следующих за ними “2” и “1”.

Отсюда можно дать биективное определение кратчайшего k-мерного пути (k-пути) в n-кубе между вершинами $< 00\ldots0 >$ и $< 11\ldots1 >$.

Определение. Кратчайший k-путь в n-кубе между $< 00\ldots0 >$ и $< 11\ldots1 >$, который можно представить (с учетом возможных перестановок строк) в виде троичной $n \times (n - k + 1)$ матрицы, удовлетворяющей свойствам 1-4. Обозначим такую символьную матрицу как $T(n, k)$.

Характерными представителями таких матриц являются: “ступенчатая матрица” $T_s(n, k)$ и “ступенчато-столбцовая” матрица $T_{sc}(n, k)$. Например, для $n = 9$, $k = 3$:

$$T_s(9,3)=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ D_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 222000000 \\ 122200000 \\ 112220000 \\ 111222000 \\ 111122200 \\ 111112220 \\ 111111222 \end{pmatrix}, T_{sc}(9,3)=\begin{pmatrix} 222000000 \\ 221200000 \\ 221120000 \\ 221112000 \\ 221111200 \\ 221111120 \\ 221111112 \end{pmatrix}$$

$$D_1^* D_2^* \dots D_9^*$$

1. $<00\dots0>\in D_1; <11\dots1>\in D_7$;
2. $\#(2)D_i = k, i = 1 \div (n-k+1)$;
3. $\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = k-1$;
4. $D_j^* \in \{(2),(2)(1),(0)(2)(1),(0)(2)\}, j = 1 \div n$;

Для антиподальных вершин (011010011) и (100101100) соответствующие столбцы $T(9,3)$ инвертируются так, что:

$$T_s(9,3)=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ D_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 222000000 \\ 122200000 \\ 112220000 \\ 111222000 \\ 111122200 \\ 111112220 \\ 111111222 \end{pmatrix} \to T'(9,3)=\begin{pmatrix} 222010011 \\ 122210011 \\ 102220011 \\ 100222011 \\ 100122211 \\ 100102221 \\ 100101222 \end{pmatrix}$$

$$D_1^* D_2^* \dots D_9^*$$

Если рассмотреть проекции k-путей для матриц $T_s(9,3)$ и $T_{sc}(9,3)$, то можно отметить их существенное структурное различие (рис.4). Чтобы обобщить такое различие, поставим для каждой матрицы в соответствие строку из n чисел $\{\#(2)D_1^*, \#(2)D_2^*, \dots, \#(2)D_n^*\}$ (число символов “2” по столбцам). Затем, введя упорядочение этих чисел по убыванию, представим их как *разбиение* числа всех “2” матрицы (их число равно $k(n-k+1)$) на n частей, при условии, что старшая часть не превышает $(n-k+1)$. Следуя принятым в [2] обозначениям, можно записать: $\lambda(T(n,k)) \vdash k(n-k+1)$ или $\lambda(T(n,k)) = \lambda(k(n-k+1); n; (n-k+1))$. При любой перестановке столбцов это разбиение не меняется.

Любая перестановка столбцов эквивалентна действию симметрической группы S_n на множестве индексов базисных векторов, что является автоморфизмом для n-куба. Таким образом, разбиение можно рассматривать как числовой инвариант, позволяющий различать неизоморфные k-пути и тем самым классифицировать k-пути в n-кубе, связав с каждым таким разбиением класс эквивалентности k-путей.

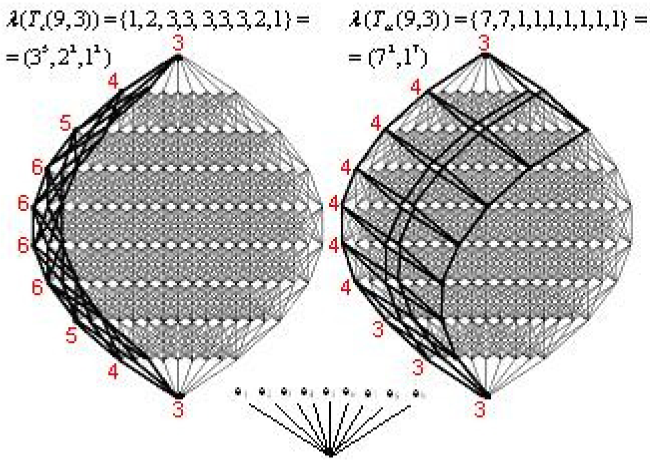


Рис.4 Графическое отображение проекций k-путей и разбиения для их символьных матриц.

Однако не любое разбиение числа символов “2” матрицы представляет кратчайший k-путь, а только вместе с выполнением всех четырех свойств (2). Таким образом, величина $\lambda(k(n-k+1); n; (n-k+1))$ даже при выполнении свойств 1-3 из (2) может служить лишь верхней оценкой числа классов эквивалентности k-путей в n-кубе, что и было показано в [8].

Ниже будет предложен алгоритм типа “решето” в терминологии Г.Эндрюса [3] получения всех классов эквивалентности $K(n,k)$ (точнее, представителей всех классов). Однако вначале рассмотрим вопрос приведения $T(n,k)$ к специальному, т.н. k-диагональному виду.

IV. Матрицы k-диагонального вида

Выше в основном рассматривались матрицы $T(n,k)$, обладающие следующим свойством: все символы “2” в них располагались на местах (i,j), для которых $(j-i)\le(k-1)$, т.е. под диагональной полосой и на самой полосе шириной в k символов. Будем условно называть такие матрицы k-диагонального вида и обозначать $T_d(n,k)$.

Утверждение 1. Пусть дана произвольная матрица $T(n,k)$, обладающая свойствами (2). Перестановкой столбцов она может быть преобразована в матрицу $T_d(n,k)$ k-диагонального вида с сохранением инварианта $\lambda(T(n,k))$.

Доказательство этого утверждения — конструктивное. Предлагается алгоритм построения перестановки столбцов, приводящий к результату.

Пусть первая строка матрицы содержит k символов “2” на местах $d_{1,x_1}, d_{1,x_2}, \dots, d_{1,x_k}$, которым соответствуют столбцы матрицы с номерами $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. Рассмотрим перестановку этих столбцов на места $1,2,\dots,k$ (точнее установку на первые k-мест в результирующей матрице k-диагонального вида $T_d(n,k)$). Затем среди оставшихся столбцов отыскиваем столбец, в котором “2” находится на уровне 2-ой строки. Такой столбец всегда найдется и он единственный, вследствие выполнения условия $\#(2)D_2 = k$.

Присоединяем этот столбец в качестве (k+1)-го к результирующей матрице. Затем среди оставшихся столбцов находим столбец, в котором “2” на уровне 3-ей строки и т.д. Процесс заканчивается, когда присоединяется последний столбец на место n-го столбца с “2” в правом нижнем углу результирующей матрицы.

Если сопроводить последовательное присоединение столбцов парой чисел их номеров в исходной и результирующей матрице, то легко из этого получить цикловую форму подстановки, переводящей $\pi T(n,k) \to T_d(n,k), \pi \in S_n$. Это показано на примере одной из матриц $T(9,3)$ на рис.5.

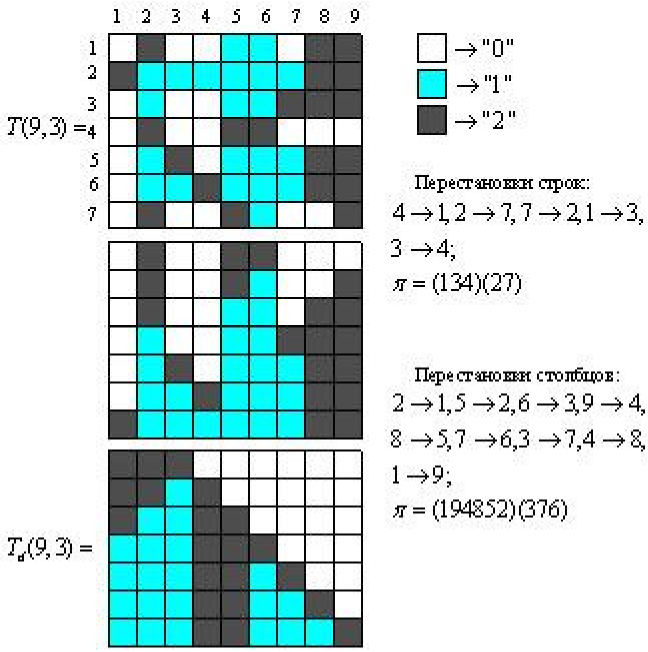


Рис.5 Приведение символьной матрицы к k-диагональному виду – вычисление необходимых перестановок строк и столбцов для n=9 и k=3.

Справедливо и более общее утверждение. Пусть предъявлена произвольная троичная матрица $M(n,k)$ размерности $n \times (n-k+1)$ для установления ее принадлежности к множеству $\mathbf{T}(n,k)$ (множество всех матриц $T(n,k)$). Тогда общий алгоритм сведения матрицы $M(n,k)$ к $T_d(n,k)$ начинается с упорядочения строк матрицы. При упорядочении строк процедура начинается с поиска граней с а.п. вершинами и затем присоединения к ним строк с учетом свойства $\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = k-1$. Процесс заканчивается, когда все строки заняли “свои” места или останавливается, когда не находится следующая строка с приведенным выше свойством. В этом случае предъявленная $M(n,k) \notin \mathbf{T}(n,k)$.

В случае успешного упорядочения строк осуществляется переход к описанному выше алгоритму перестановки столбцов и в случае его естественного окончания дает положительный ответ и выдает необходимые перестановки строк и столбцов, а в случае отсутствия на очередном шаге подходящего столбца (или наличия более одного столбца) свидетельствует о нарушении свойства $\#(2)D_i = k$ и поэтому $M(n,k) \notin \mathbf{T}(n,k)$.

V. Генерация классов эквивалентности k-путей

Алгоритм генерации представителей всех классов основан на следующем рассмотрении. Обозначим через $\mathbf{T}_d(n,k)$ множество всех k-диагональных матриц, для которых выполнены свойства 1-4. Пусть имеется некоторая символьная матрица $T_d(n,k) \in \mathbf{T}_d(n,k)$. Удалим в ней n-ый (правый крайний) столбец и $(n-k+1)$-ую (последнюю) строку. Обозначим полученную матрицу как $T_d^{-1}(n,k)$. Для этой матрицы автоматически выполняются свойства 1-4 и, следовательно, она принадлежит множеству матриц $\mathbf{T}_d(n-1,k)$, т.е. $T_d^{-1}(n,k) \in \mathbf{T}_d(n-1,k)$. С ней поступаем аналогично так, что $T_d^{-2}(n,k) \in \mathbf{T}_d(n-2,k)$ и т.д. вплоть до $T_d^{-s}(n,k) \in \mathbf{T}_d(n-s,k)$, когда $n-s=k$. В этом случае множество $\mathbf{T}_d(k,k)$ состоит из единственной матрицы с одной строкой из символов “2”, т.е. кратчайший k-путь в k-кубе между любыми а.п. вершинами есть сам k-куб.

Теперь, с этого момента, рассмотрим этот процесс в обратном порядке, т.е. будем добавлять к матрице последний столбец и последнюю строку с единственным символом “2” в правом нижнем углу (как необходимое условие принадлежности конструируемых матриц к виду k-диагональных). Чтобы корректно дополнить эту матрицу до $T_d(n,k)$ необходимо выполнить условие $\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = k-1$ и вставить один символ “1” на оставшееся место в последней (в нашем случае 2-ой строке). Число таких вариантов равно k. Они и образуют все множество $\mathbf{T}_d(n,k)$.

С каждой матрицей из $\mathbf{T}_d(k+s,k)$ будем поступать аналогично, дополнительно сохраняя в столбцах те же места для вставленных на предыдущих шагах символов “1” (соблюдение 4-го свойства для матриц $T(n,k)$). Процесс останавливаем при достижении заданного n. Практически строится дерево полного перебора с числом вершин k^{n-k} на шаге n. Каждой вершине соответствует единственная матрица $T(n,k)$ с разбиением $\lambda(T(n,k))$. Сравнивая разбиения матриц и отбрасывая матрицы с разбиениями, которые повторяются, мы практически реализуем метод решета. Начальные шаги предложенного метода и некоторые матрицы для $T(9,3)$ показаны на рис.6.

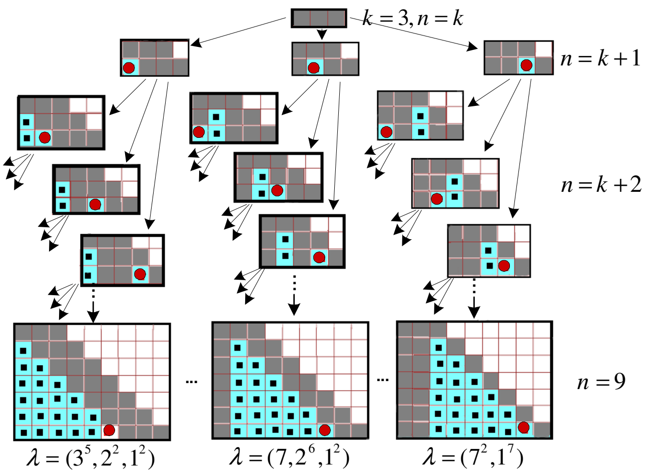


Рис.6 Начальные шаги генерации классов эквивалентности для $n=9$ и $k=3$. Красным кругом показаны места возникновения в матрице столбцов из символов “1”.

С помощью предложенного метода получены матрицы-представители всех классов эквивалентности для $n=9$, $n=7$ и $k=3$. Расчеты проводились по предложенному выше алгоритму “решето” для генерации классов эквивалентности k-путей. Оценки по памяти и по скорости для использовавшейся реализации алгоритма позволяют использовать компьютеры класса desktop для достаточно высоких значений n и k. Сложность алгоритма $\sim k^{(n-k)}$. Производительность современных процессоров Intel (core i5-i7) для настольных ПК составляет 10^{11} операций/сек. Таким образом, для $k=3$: $n=17$, при времени расчета порядка десятка минут.

Оценка алгоритма по памяти составляет $\sim 2(n-k+1)*k^{(n-k+1)}$ и подразумевает использование двух двумерных динамических структур данных. При выделении 4 байт (int) на один элемент структуры, для $k=3$, $n=17$ получим ~1,6 Гб используемой памяти.

Для больших значений n и k возможно распараллеливание алгоритма и расчет на суперкомпьютере (“Чебышев”) или другая его реализация для desktop компьютеров.

Число классов при $n=7$ и $k=3$: $|K(7,3)|=9$. Их разбиения, соответствующие им диаграммы Юнга и их укладка в параллелепипед со сторонами $|K(n,k)|\times(n-k+1)\times n$ приведены на рис.7

$$T_1(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1112220\\1111222\end{pmatrix},\quad T_2(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1112220\\1112122\end{pmatrix},\quad T_3(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1112220\\1112212\end{pmatrix},$$

$\lambda=(3^3,2^2,1^2)$ $\lambda=(4,3,2^3,1^2)$ $\lambda=(4,3^2,2,1^3)$

$$T_4(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\2212000\\2211200\\1211220\\1211212\end{pmatrix},\quad T_5(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1121220\\1121122\end{pmatrix},\quad T_6(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1121220\\1121212\end{pmatrix},$$

$\lambda=(5,3^2,1^4)$ $\lambda=(5,2^4,1^2)$ $\lambda=(5,3,2^2,1^3)$

$$T_7(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1122120\\1112122\end{pmatrix},\quad T_8(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1221200\\1221120\\1221112\end{pmatrix},\quad T_9(7,3)=\begin{pmatrix}2220000\\1222000\\1122200\\1122120\\1122112\end{pmatrix},$$

$\lambda=(4^2,2^2,1^3)$ $\lambda=(5^2,1^5)$ $\lambda=(5,4,2,1^4)$

344455555
333423345
323222321
221222111
221121111
111111111
111111111

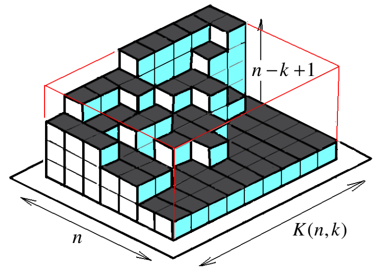


Рис.7 Разбиения и соответствующие им диаграммы Юнга для n=7, k=3. Параллелепипед Юнга.

Для случая $n=9$, $k=3$ число классов – 38. Их разбиения указаны в таблице 3.

Таблица 3

$(7,4,3,2,1^5)$	$(7,5,3,1^6)$	$(7,6,2,1^6)$	$(7,5,2^2,1^5)$
$(7,3^2,2^2,1^4)$	$(7,4,2^3,1^4)$	$(7,3,2^4,1^3)$	$(7,2^6,1^2)$
$(7,3^3,1^5)$	$(7,4^2,1^6)$	$(7^2,1^7)$	
$(6,5,3,2,1^5)$	$(6,4,3,2^2,1^4)$	$(6,4,2^4,1^3)$	$(6,3^3,2,1^4)$
$(6,3,2^5,1^2)$	$(6,3^2,2^3,1^3)$	$(6,4^2,2,1^5)$	$(6,5,2^3,1^4)$
$(6^2,2^2,1^5)$			
$(5,4,3,2^3,1^3)$	$(5,4,3^2,2,1^4)$	$(5^2,3,2^2,1^4)$	$(5,4,2^5,1^2)$
$(5,4^2,2^2,1^4)$	$(5,4^2,3,1^5)$	$(5,3^2,2^4,1^2)$	$(5,3^3,2^2,1^3)$
$(5^2,3^2,1^5)$	$(5^2,2^4,1^3)$		
$(4^3,3,2,1^4)$	$(4,3^3,2^3,1^2)$	$(4,3^4,2,1^3)$	$(4^2,3^2,2^2,1^3)$
$(4^2,3,2^4,1^2)$	$(4^2,3^3,1^4)$	$(4^3,2^3,1^3)$	
$(3^5,2^2,1^2)$			

Каждому классу (разбиению) соответствует своя структура (“форма”) k-пути. Топологические характеристики таких форм могут быть вычислены на основании самих символьных матриц. Рассмотрению таких характеристик классов в этой конечной геометрии будет посвящена отдельная статья.

Возвращаясь к прокладке трехмерного метро в 9-кубе, приведем три символьные матрицы одного класса с разбиением $\lambda=(3^5,2^2,1^2)$, которые соответствуют трем непересекающимся (кроме конечных станций $<00\ldots0>$ и $<11\ldots1>$) линиям (рис.8).

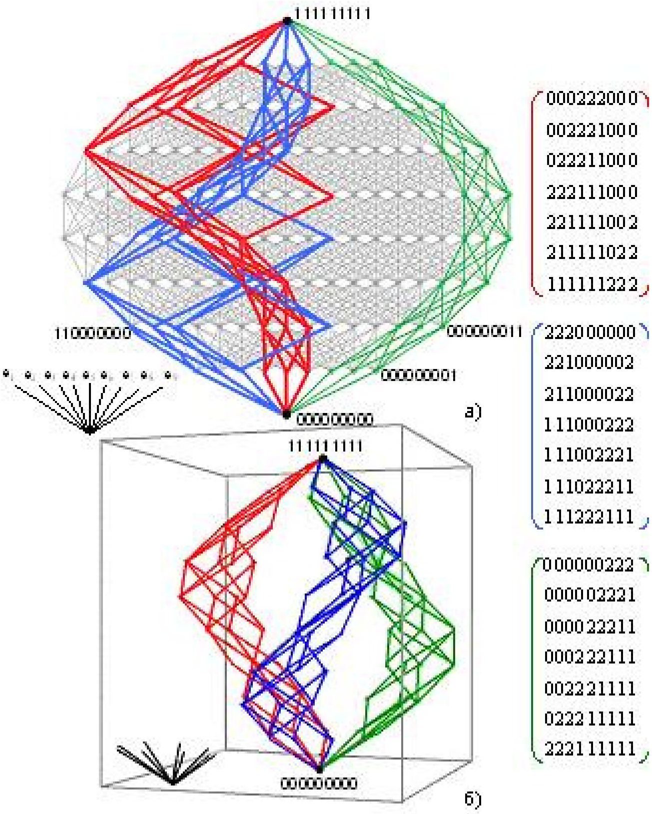


Рис. 8 Три линии "трехмерного метро" и их символьные матрицы для 9-куба. а) Графика при плоском репере. б) Графика при 3d-репере.

Предположим, что каждому базисному вектору изначально приписан некоторый целочисленный вес $q_j \to \mathbf{e}_j, j = 1 \div n$ и при этом k-грани ставится в соответствие $\sum q_j$, где $\mathbf{e}_j$ являются образующими этой грани, что представляется символами "2" в кубанте, биективном этой грани. Ставится задача прокладки кратчайшего пути не только заданного класса (т.е. заданной формы) но и минимального суммарного веса по граням, входящим в этот путь.

Итак, пусть заданы B –базис, Q –целочисленный вес и $T(n,k)$ –матрица для k-пути некоторого выбранного класса с разбиением λ. Пусть также для каждого D_j^* столбца матрицы $\#(2)D_j^* = p_j$, соответствующую последовательность будем обозначать $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Как построить матрицу того же класса $T^*(n,k)$, для которой $QP^* = \sum q_j p_j^*$ было минимальным? Прежде введем (следуя Р.Стенли [2]) обозначения для последовательности чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как $X_{\geq}$, когда выполнено, что $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, и как $X_{\leq}$ в случае $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Для наглядности представим элементы, как показано ниже:

$$B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}), Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

$$T(n,k) = \begin{pmatrix} d_{11}d_{12}\ldots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\ldots d_{2n} \\ \ldots \\ d_{s1}d_{s2}\ldots d_{sn} \end{pmatrix}, P = (p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Теперь частично упорядочим $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ в порядке неубывания, т.е. получим $Q_{\leq} = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ и по этим последовательностям установим $\pi_1 \in S_n$ такое, что $\pi_1 Q = Q_{\leq}$. Аналогично, для $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и $P_{\geq} = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ получим $\pi_2 \in S_n$ такое, что $\pi_2 P = P_{\geq}$. Отсюда:

$$\pi_1 \pi_2 \pi_1^{-1} = \pi^*,$$

$$\pi^* T = T^* \text{ (перестановка столбцов),}$$

$$T^* \to \min QP^* = \sum q_j p_j^*.$$

Ниже приведены конкретные вычисления для выбора "оптимальной по сумме весов" линии метро при выбранном ($\lambda = (3^5, 2^2, 1^2)$) классе 3-путей, при заданном $Q = (1,2,3,4,5,4,3,2,1)$ (можно интерпретировать как наибольшую трудоемкость прокладки тоннелей вдоль $\mathbf{e_5}, \mathbf{e_4}, \mathbf{e_6}$) (рис.9):

$$B = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_8\mathbf{e}_9)$$

$$T(9,3) = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,2\,2\,2 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,2\,2\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,2\,2\,2\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,2\,2\,2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,2\,2\,2\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,2\,2\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 2\,2\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}, Q(T)P(T) = 67$$

$$Q = (1\,2\,3\,4\,5\,4\,3\,2\,1)$$

$$Q_{\leq} = (1\,1\,2\,2\,3\,3\,4\,4\,5)$$

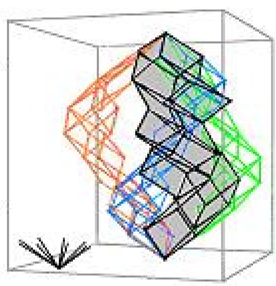
$$5 \to 9, 4 \to 8, 6 \to 7, 3 \to 6, 7 \to 5, 8 \to 4,$$
$$2 \to 3, 9 \to 2 = \pi_1 = (236759)(48)$$

$$P = (1\,2\,3\,3\,3\,3\,3\,2\,1)$$

$$P_{\geq} = (3\,3\,3\,3\,3\,2\,2\,1\,1)$$

$$1 \to 8, 2 \to 7, 8 \to 6, 7 \to 5, 6 \to 4, 5 \to 3,$$
$$4 \to 2, 3 \to 1 = \pi_2 = (18642753)$$

$$\pi' = (14952683)$$



$$B = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_8\mathbf{e}_9)$$

$$\pi'(T) = T' = \begin{pmatrix} 0\,0\,2\,0\,2\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,0\,2\,0\,1\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,2\,1\,0\,1\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,2\,1\,0\,1\,0\,1\,2\,2 \\ 2\,2\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,2 \\ 2\,1\,1\,0\,1\,2\,1\,1\,2 \\ 2\,1\,1\,2\,1\,2\,1\,1\,1 \end{pmatrix}, Q(T')P(T') = 50$$

Рис.9 Выбор минимальной по сумме весов линии метро.

VI. Заключение. Символьные матрицы и суперкомпьютеры

Вопросы классификации и представления многомерных структур играют и в будущем, очевидно, будут играть важную роль в задачах поиска рациональных (в т.ч. и оптимальных) решений в сложных системах на базе комбинаторного анализа и синтеза. Алгебраизация представлений комбинаторно-сложных структур и специальные машинные операции для представлений вместе с организацией нетрадиционных структур памяти могут оказаться достаточно эффективными при решении такого рода задач. Некоторые черты такого подхода можно подметить и в вышеизложенных методах. База рассмотренного инструментария – поразрядные (не обязательно побитовые) операции, которые потенциально могут выполняться одновременно для длинных стрингов. Конечно, всегда возникает вопрос: насколько эффективной будет интерпретация такого символьного подхода на современных суперкомпьютерах без дополнительных аппаратных решений? Ответ на этот вопрос лежит в плоскости реализации таких программных интерпретаций на современных суперкомпьютерах (в частности, на суперкомпьютере МГУ “Чебышев”).

Со своей стороны символьные представления в более широком плане подсказывают направление возможных шагов для эффективного поиска оптимального назначения множества задач на исполнительные устройства в распределенных гетерогенных вычислительных системах [9] с целью максимального использования ресурсов системы. Варианты назначений в таких задачах представляются так называемыми таблоидами определенных форм разбиений $\lambda \vdash n$ (в основе которых диаграммы Юнга [10]), где n-число классов исполнительных устройств.

Библиография

[1] G.-C. Rota and N. Metropolis, “Combinatorial structure of the faces of the n-cube,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 35, no. 4, 1978, pp. 689-694.

[2] R. P. Stanley, “Enumerative combinatorics,” Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] Г. Эндрюс, Теория разбиений. Москва “Наука”. Гл. ред. физ-мат. лит., 1982.

[4] Yuri I. Manin, “Classical computing, quantum computing, and Shor’s factoring algorithm,” 1999. Available: http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9903008.pdf

[5] А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, “Новый подход к теории представлений симметрических групп. II”, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. X, Зап. научн. сем. ПОМИ, **307**, ПОМИ, СПб., 2004, с. 57-98. Электронный ресурс: http://www.mathnet.ru/links/4035276e356cc01fea05e94ea682825b/znsl840.pdf

[6] Г. Г. Рябов, “О четверичном кодировании кубических структур”// Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, №2. с.340-347. Электронный ресурс: http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2009/pdf/v10r138.pdf

[7] Г. Г. Рябов, “Хаусдорфова метрика на гранях n-куба”// Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, №1. с.151-155. Электронный ресурс: http://mech.math.msu.su/~fpm/ps/k10/k101/k10112.pdf

[8] G. G. Ryabov, V. A. Serov, “On classification of k-dimension paths in n-cube,” Applied Mathematics, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 723-727. Available: http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.54069

[9] D. Kim, “Representations of task assignments in distributed systems using Young tableaux and symmetric groups,” 1 May 2013. Available: http://arxiv.org/pdf/1012.1288v4.pdf

[10] R. M. Adin, Y. Roichman, “Enumeration of Standard Young Tableaux,” 31 Aug, 2014. Available: http://xxx.tau.ac.il/pdf/1408.4497.pdf

“Multidimensional metro” and symbol matrices.

G. G. Ryabov, V. A. Serov

***Abstract*—The complexes of k-faces for an n-cube represented as symbol matrices over a finite alphabet A’={Ø,0,1,2} are considered. The classification of the shortest k-dimension paths (k-paths) in n-cube founded on numerical invariant for symbol matrices is researched. The "sieve" algorithm for generation of all instances of the k-paths classes in n-cube is proposed.**

***Keywords*—Bijection, finite alphabet, cubant, Hausdorff-Hamming metrics, symbol matrices, k-face of n-cube, k-path.**