Ветвление, недостижимость и непосредственные предшественники состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций данного графа

А. В. Жаркова

***Аннотация* — Рассматривается конечная динамическая система, состояниями которой являются все возможные ориентации данного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. В работе подсчитывается ветвление данного состояния системы (количество его непосредственных предшественников), а именно: если в данном орграфе есть стоки, то его ветвление равно количеству таких различных подмножеств множества его источников, из которых в каждый сток этого орграфа есть дуга; если в данном орграфе нет стоков, то его ветвление равно количеству различных подмножеств множества его источников, включая пустое. В качестве следствий находятся все непосредственные предшественники достижимого состояния, а именно: все дуги, исходящие из всех источников соответствующих множеств переориентируются, а все остальные дуги остаются без изменения; определяется критерий недостижимости состояния, а именно: состояние недостижимо тогда и только тогда, когда в нём существует хотя бы один сток, не смежный с источниками.**

***Ключевые слова* — Ветвление, граф, достижимое состояние, конечная динамическая система, недостижимость, ориентированный граф, отказоустойчивость, предшественник, эволюционная функция.**

I. Введение

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов – как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей.

При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем [1–3].

В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов.

В настоящей работе графы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

II. Постановка задачи

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S,\ \delta)$, где S – конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями* системы, $\delta: S \to S$ – отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией* системы. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности орграфа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры в свою очередь называются *предельными циклами*, или *аттракторами*.

К числу основных характеристик состояний динамических систем относятся *ветвление* – количество непосредственных предшественников данного состояния, а также свойство *недостижимости* состояния, то есть когда состояние имеет нулевое ветвление, состояние, обладающие данным свойством называется *недостижимым* или *начальным* состоянием системы, иначе состояние называется *достижимым*.

В данной работе подсчитывается ветвление состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций данного графа, определяется критерий недостижимости состояния системы, находятся все непосредственные предшественники достижимого состояния системы.

III. Описание динамической системы

Пусть дан некоторый граф G. Пометим его вершины и придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив ориентированный граф $\vec{G}$. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно

Статья получена 13 апреля 2022.

Жаркова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Российская Федерация (e-mail: ZharkovaAV3@gmail.com).

переориентирует все дуги, входящие в стоки (вершины с нулевой степенью исхода), а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\alpha(\vec{G})$. Если проделать данные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Данная динамика для бесконтурных связных орграфов введена в [1].

Итак, будем рассматривать динамическую систему (Γ_G, α), где через Γ_G обозначим множество всех возможных ориентаций данного графа G, а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $\vec{G} \in \Gamma_G$, то его динамическим образом $\alpha(\vec{G})$ является орграф, полученный из $\vec{G}$ одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между $\vec{G}$ и $\alpha(\vec{G})$ нет.

На рис. 1 изображён граф G и карта конечной динамической системы (Γ_G, α).

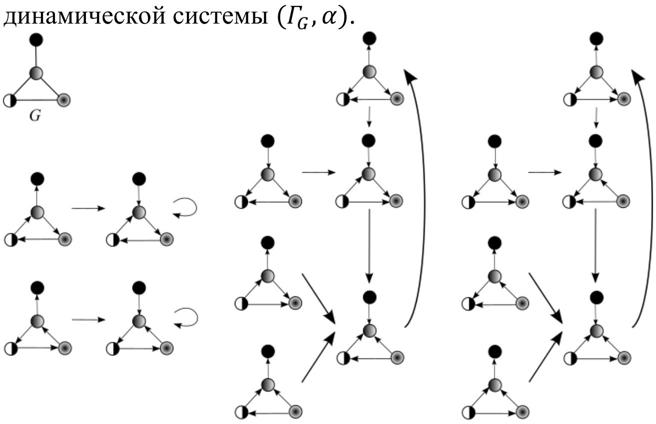

Рис. 1 – Граф G и карта конечной динамической системы (Γ_G, α)

IV. Ветвление состояний

Определим ветвление состояний в полученной системе. Автором, в частности, рассматривались ветвления состояний в конечных динамических системах, ассоциированных с некоторыми типами графов, например, цепями [4].

В таблице I приведено ветвление состояний конечной динамической системы (Γ_G, α), представленной на рис. 1.

Таблица I – Ветвление состояний конечной динамической системы (Γ_G, α), представленной на рис. 1.

Ветвление	0	1	2	3
Количество состояний	8	2	4	2

В книге [1] состояниями системы являются бесконтурные связные орграфы и замечается, что для любого достижимого состояния s рассматриваемой системы и состояния $s' = \alpha(s)$ выполняется, что каждый сток в s' имеет по крайней мере одну смежную вершину, которая также является стоком и в s. Ставится вопрос об определении всех возможных непосредственных предшественников состояния s' данной динамической системы. Из определённого свойства автор книги замечает, что каждый сток в s' имеет по крайней мере одну смежную вершину, являющуюся источником (вершиной с нулевой степенью захода), и тогда ответ на вопрос может быть получен путём построения всех таких непустых подмножеств множества источников в орграфе, представляющем состояние s', которые смежны со всеми стоками. Тогда количество непосредственных предшественников данного состояния s' равно количеству таких подмножеств, если же для данной ориентации графа таких подмножеств не существует, то такое состояние является начальным.

Множество источников ориентированного графа назовём *допустимым*, если из него в каждый сток этого орграфа есть дуга.

На рис. 2 орграф слева имеет два допустимых множества источников: $\{v_4\}$, $\{v_1, v_4\}$, справа – не имеет допустимого множества источников.

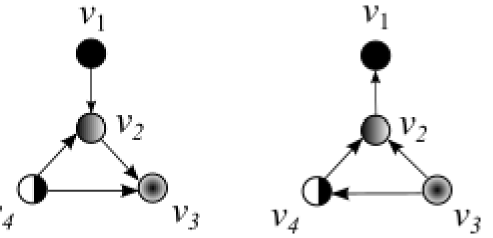

Рис. 2 – Орграфы с допустимыми множествами источников и без них

В работе автора [4] доказывается теорема о ветвлении состояний конечной динамической системы всех возможных ориентаций данной цепи, подходящих под состояния рассматриваемой конечной динамической системы, у которых есть стоки, приведём общий случай.

Теорема 1. Ветвление данного состояния s динамической системы (Γ_G, α) равно

1) количеству допустимых множеств источников в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, если в $\vec{G}$ есть стоки;

2) количеству различных подмножеств множества источников, включая пустое, в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, если в $\vec{G}$ нет стоков.

Доказательство. 1) Покажем, что каждому непосредственному предшественнику состояния s соответствует некоторое множество источников в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s.

Пусть дано достижимое состояние $\vec{G} = \alpha(\vec{G}')$, при этом эволюционная функция α у орграфа $\vec{G}'$ одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, или, другими словами, стоки преобразует в источники, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\vec{G}$.

Рассмотрим два случая в зависимости от наличия стоков в орграфе $\vec{G}$.

а) В орграфе $\vec{G}$ есть стоки.

Каждый сток состояния $\vec{G}$ имеет по крайней мере одну соседнюю вершину, являющуюся стоком в $\vec{G}'$. Обязательное наличие такого стока объясняется следующим образом. Пусть вершина v_k является стоком в $\vec{G}$, тогда из определения эволюционной функции v_k не могла быть стоком в $\vec{G}'$, значит, по крайней мере одна дуга, входящая в сток $v_k \in V_{\vec{G}}$, была переориентирована в $\vec{G}'$ в ходе эволюции, а значит, по крайней мере одна из соседних с v_k вершин являлась стоком в $\vec{G}'$ и стала источником в $\vec{G}$.

Таким образом, каждый сток орграфа $\vec{G}$ имеет по крайней мере одну соседнюю вершину, являющуюся источником, из которой в данный сток есть дуга.

Отсюда получаем, что каждому непосредственному предшественнику достижимого состояния $\vec{G}$ со стоками соответствует некоторое допустимое множество источников в $\vec{G}$.

б) В орграфе $\vec{G}$ нет стоков.

Так как состояние $\vec{G}$ является достижимым, то у него есть как минимум один предшественник $\vec{G}'$. Если у орграфа $\vec{G}'$ нет стоков, то орграфы $\vec{G}$ и $\vec{G}'$ совпадают, тем самым образуя аттрактор единичной длины. Если у орграфа $\vec{G}'$ есть стоки, то при применении эволюционной функции α все они преобразовались в источники, соответствующие некоторым источникам в орграфе $\vec{G}$.

Отсюда получаем, что каждому непосредственному предшественнику достижимого состояния $\vec{G}$ без стоков соответствует некоторое множество источников, включая пустое, в $\vec{G}$.

2) Покажем, что каждому соответствующему множеству источников состояния $\vec{G}$ соответствует некоторый его непосредственный предшественник. Рассмотрим два случая в зависимости от наличия стоков в орграфе $\vec{G}$.

а) В орграфе $\vec{G}$ есть стоки.

Покажем, что каждому допустимому множеству источников состояния $\vec{G}$ соответствует некоторый его непосредственный предшественник.

Пусть состояние $\vec{G}$ имеет некоторое допустимое множество источников, то есть в котором в каждый сток состояния $\vec{G}$ имеется дуга.

Если все источники из этого множества обратить в стоки, то получаем некоторое состояние $\vec{G}'$. Других стоков в полученном состоянии $\vec{G}'$ не будет: так как рассматривается именно допустимое множество источников и все стоки, которые были в $\vec{G}$, в $\vec{G}'$ таковыми быть перестанут; также не появится в нём новых, отличных от рассматриваемых, стоков, потому что переориентируются только дуги, исходящие из соответствующих источников, а остальные дуги остаются в прежней ориентации. Если теперь в $\vec{G}'$ все стоки преобразовать в источники, то получим исходное состояние $\vec{G}$. Последнее преобразование как раз описывается в заданной динамике, то есть $\vec{G}'$ является предшественником состояния $\vec{G}$: $\alpha(\vec{G}') = \vec{G}$.

Таким образом, каждому допустимому множеству источников в $\vec{G}$ со стоками соответствует некоторый его непосредственный предшественник.

б) В орграфе $\vec{G}$ нет стоков.

Покажем, что каждому подмножеству множества источников, включая пустое, в орграфе $\vec{G}$ соответствует некоторый его непосредственный предшественник.

Так как в орграфе $\vec{G}$ нет стоков, то согласно заданной динамике получаем $\alpha(\vec{G}) = \vec{G}$, то есть образуется аттрактор единичной длины и $\vec{G}$ будет являться своим же непосредственным предшественником, что будет соответствовать пустому подмножеству множества источников, а так же пустому множеству источников.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество множества источников в орграфе $\vec{G}$. Если все источники из этого множества обратить в стоки, то получаем некоторое состояние $\vec{G}'$. Других стоков в полученном состоянии $\vec{G}'$ не будет: в исходном состоянии $\vec{G}$ стоков не было; также не появится в нём других, отличных от рассматриваемых, стоков, потому что переориентируются только дуги, исходящие из соответствующих источников, а остальные дуги остаются в прежней ориентации, и новых входящих дуг для образования стока в других вершинах не появится. Если теперь в $\vec{G}'$ все стоки преобразовать в источники, то получим опять исходное состояние $\vec{G}$. Последнее преобразование как раз описывается в заданной динамике, то есть $\vec{G}'$ является предшественником состояния $\vec{G}$: $\alpha(\vec{G}') = \vec{G}$.

Таким образом, каждому подмножеству множества источников, включая пустое, в $\vec{G}$ без стоков соответствует некоторый его непосредственный предшественник.

3) Покажем взаимную однозначность соответствия между непосредственными предшественниками данного состояния $\vec{G}$ и его соответствующими множествами источников.

а) Допустим, есть два различных множества источников достижимого состояния $\vec{G}$, которые определяют один и тот же его непосредственный предшественник.

Преобразуем в $\vec{G}$ источники из этих множеств в стоки, получив тем самым состояния $\vec{G}'$ и $\vec{G}''$, причём из предположения данные состояния совпадают, однако в силу рассуждений в доказательстве пункта 2 получаем, что данные состояния будут различными.

Значит, два различных множества источников данного состояния не могут определять один и тот же его предшественник.

б) Допустим, что у нас имеется два различных непосредственных предшественника $\vec{G}'$ и $\vec{G}''$ достижимого состояния $\vec{G}$, которые определяются одним и тем же соответствующим множеством источников в $\vec{G}$.

В силу доказательств пунктов 1 и 2 получаем, что у состояния не может быть два различных непосредственных предшественника, определённых одним и тем же соответствующим множеством источников $\vec{G}$. ■

На рис. 3 изображены примеры состояний конечной динамической системы (Γ_G, α), представленной на рис. 1, к соответствующим пунктам теоремы 1:

1) у орграфа два допустимых множества источников:

$\{v_4\}$, $\{v_1, v_4\}$ и его ветвление равно 2;

2) у состояния нет стоков, его подмножества множества источников: $\{\emptyset\}$, $\{v_1\}$ и его ветвление равно также 2.

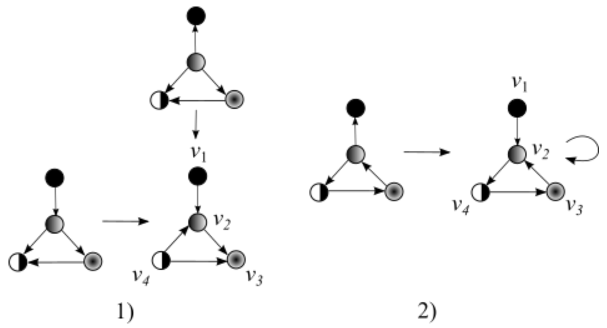

Рис. 3 – Примеры к соответствующим пунктам теоремы 1

V. Недостижимые состояния

Следствие 1. Состояние s динамической системы (Γ_G, α) недостижимо тогда и только тогда, когда в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, есть по крайней мере один сток и при этом нет ни одного допустимого множества источников, или, другими словами, когда существует хотя бы один сток в $\vec{G}$, не смежный с источниками.

Доказательство. 1) Пусть дано недостижимое состояние s динамической системы (Γ_G, α), его ветвление равно 0. Рассмотрим два случая в зависимости от наличия стоков в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s.

а) В орграфе $\vec{G}$ есть стоки. Тогда согласно теореме 1 у данного состояния нет ни одного допустимого множества источников.

б) В орграфе $\vec{G}$ нет стоков. Согласно теореме 1 данное состояние имеет ветвление больше 0 (как минимум $\vec{G}$ будет являться своим же непосредственным предшественником), то есть является достижимым.

2) Пусть дано состояние s динамической системы (Γ_G, α), при этом в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, есть по крайней мере один сток и при этом нет ни одного допустимого множества источников, или, другими словами, когда существует хотя бы один сток в $\vec{G}$, не смежный с источниками. Так как количество допустимых множеств источников в орграфе $\vec{G}$ равно 0, то согласно теореме 1 ветвление данного состояния s также равно 0, то есть состояние s является недостижимым. ■

На рис. 2 справа изображено недостижимое состояние конечной динамической системы (Γ_G, α), представленной на рис. 1, у которого вершина v_1 является стоком, не смежным с источником.

VI. Предшественники состояний

Следствие 2. Для достижимого состояния s динамической системы (Γ_G, α) все его непосредственные предшественники определяются

1) всеми различными допустимыми множествами источников в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, если в $\vec{G}$ есть стоки;

2) всеми подмножествами множества источников, включая пустое, в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s, если в $\vec{G}$ нет стоков,

следующим образом: все дуги, исходящие из всех источников соответствующего множества переориентируются, а все остальные дуги остаются без изменения.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 и её доказательства, где показывается, что каждое соответствующее множество источников определяет единственный предшественник путем переориентации всех дуг, исходящих из данных источников. ■

На рис. 3 изображены примеры состояний конечной динамической системы (Γ_G, α), представленной на рис. 1, к соответствующим пунктам следствия 2:

1) у орграфа два допустимых множества источников: $\{v_4\}$, $\{v_1, v_4\}$, предшественник слева получен путём переориентации дуг, исходящих из вершины v_4, сверху – из вершин v_1 и v_4;

2) у состояния нет стоков, его подмножества множества источников: $\{\emptyset\}$, $\{v_1\}$, данное состояние является своим же предшественником, образуя аттрактор единичной длины, предшественник слева получен путём переориентации дуг, исходящих из вершины v_1.

VII. Заключение

В работе подсчитано ветвление состояний рассматриваемой конечной динамической системы (Γ_G, α) всех возможных ориентаций данного графа G, определён критерий недостижимости состояния системы, найдены все непосредственные предшественники достижимого состояния системы, что является полезным для построения отказоустойчивых графовых систем.

Библиография

[1] V. C. Barbosa, “An atlas of edge-reversal dynamics”. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.

[2] A. Khrennikov A. and M. Nilsson, “On the number of cycles of p-adic dynamical systems”. J. Number Theory, 2001, vol. 90, pp. 255–264.

[3] В. Н. Салий, “Об одном классе конечных динамических систем”. Вестник Томского госуниверситета. Приложение, 2005, № 14, сс. 23–26.

[4] А. В. Власова, “Об одной динамической системе”. Саратов. гос. ун-т, Саратов, 2007, 17 с., библиогр.: 2 назв., рус. деп. в ВИНИТИ 17.12.07, № 1181-В2007.

Branching, inaccessibility and immediate predecessors of the states in finite dynamic system of all possible orientations of a graph

A. V. Zharkova

***Abstract* — A finite dynamic system of graph orientations is considered. The states of such a system are all possible orientations of a given graph, and the evolutionary function of the system transforms digraphs by reorientation of all arcs entering the sinks. Branching of the states (the number of its immediate predecessors) is found, namely, it is equal to the number of such different subsets of the set of sources in the digraph from which there is an arc to each sink of this digraph, if it has sinks; and to the number of different subsets of the set of sources, including the empty one, in the digraph if there are no sinks in it. As a consequence immediate predecessors of the states is found, namely, all arcs emanating from all sources of the corresponding sets are reoriented, and all other arcs remain unchanged. The inaccessibility property is defined for a state, namely, it is inaccessible if and only if there is at least one sink in the digraph that is not adjacent to the sources.**

Keywords — *Accessible state, branching, directed graph, evolutionary function, graph, finite dynamic system, fault-tolerance, inaccessibility, predecessor*.

REFERENCES

[1] V. C. Barbosa, “An atlas of edge-reversal dynamics”. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.

[2] A. Khrennikov A. and M. Nilsson, “On the number of cycles of p-adic dynamical systems”. J. Number Theory, 2001, vol. 90, pp. 255–264.

[3] V. N. Salij, “Ob odnom klasse konechnyh dinamicheskih sistem”. Vestnik Tomskogo gosuniversiteta. Prilozhenie, 2005, # 14, ss. 23–26.

[4] A. V. Vlasova, “Ob odnoj dinamicheskoj sisteme”. Saratov. gos. un-t, Saratov, 2007, 17 s., bibliogr.: 2 nazv., rus. dep. v VINITI 17.12.07, # 1181-V2007.

Author — Zharkova Anastasiia Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography, Saratov State University, Saratov, Russian Federation (e-mail: ZharkovaAV3@gmail.com).