Системы счисления в древности и современности

Тихвинский В.И., В.В. Холмогоров

Аннотация **– Человечество издавна стремилось упростить вычислительный процесс. Разбив счетные единицы на разряды, оно придумало систему счисления [1]. Система счисления представляет собой способ записи чисел специальными символами. Цифра в такой записи показывает количество единиц в разряде числа. Число же являет собой набор, состоящий из одной или более цифр, который определяет общее количество вычисленных единиц. Единица – это мера для подсчета чего-либо.**

Система счисления может иметь одно или несколько оснований. Основание показывает во сколько раз единица последующего разряда больше единицы предыдущего. В системе с более чем одним основанием несколько разрядов могут играть роль одного, что будет показано далее. Разряд числа имеет вес, который определяет, во сколько раз количество единиц текущего разряда больше единиц, с которых начался счет.

Существуют непозиционные системы счисления, в которых цифра определяет одновременно и количество единиц в разряде числа, и вес этого разряда. В позиционных же системах счисления вес разряда зависит от позиции цифры в числовом наборе.

Первоначально системы счисления были непозиционные, написание их цифр было связанно со счетной доской. Счетная доска представляла собой поле, разделенное на полосы, иными словами – углубления. В полосах двигались счетные марки [2]. Марки откладывались в левую сторону счетной доски и сбрасывались в правую. Количество отложенных марок определяло количество вычисленных единиц. Для записи отложенных единиц писцом на папирусе или ином носителе для конкретной марки разряда счетной доски использовался конкретный символ, обозначающий одновременно подсчитанную единицу на счетной доске и вес разряда. Цифра могла состоять из набора однотипных символов, определяющих количество единиц в разряде [3], что будет показано на примерах далее.

Ключевые слова **– системы счисления, счетные единицы, числа, цифры, счетные доски, вес разряда.**

ВВЕДЕНИЕ

В процессе написания данной статьи был разработан комплекс подпрограмм и функций на языке программирования VBA позволяющий моделировать счетные доски для систем счисления с различным основанием в среде Excel, что может быть использовано в учебном процессе, элементы данного программного комплекса продемонстрированы на рисунках 2, 3, 5, 6.

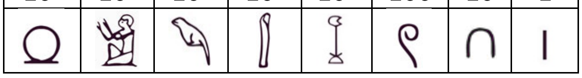
В среде Excel были смоделированы счетные доски для десятичной системы счисления, для римской системы счисления и для вавилонской. Счетная полоса в моделируемой доске выделяется цветом, отличным от цвета фона, а марка изображается символом маркера ● различного цвета. Для моделирования откладки марок используется подпрограмма SDV, имеющая входные параметры i, j, l, p. i, j это координаты ячейки таблицы Excel, в которой выбрана марка. l, p – левая и правая координата по столбцу, определяющая границу счетной полосы. Подпрограмма SDV помещается в событийную подпрограмму, срабатывающую при выборе ячейки электронной таблицы, в параметры i, j, через соответствующие свойства объекта Target, передается значение строки и столбца выбранной ячейки, а левая и правая координата границы счетной полосы передается числовыми неименованными константами, например: SDV Target.Row, Target.Column, 4, 8. При проверке определенных условий, выбранная марка в счетной полосе, и все марки, расположенные левее её, перемещаются в левую сторону счетной полосы, либо выбранная марка, и все марки, расположенные правее её, перемещаются в правую сторону счетной полосы. Для подсчета количество отложенных марок в счетной полосе, используется разработанная нами функция summ, в аргументы которой передается координаты крайне левой и крайне правой ячейки счетной полосы. Помимо рассмотренной функции используются также специальные функции, позволяю преобразовать количество отложенных марок в цифру соПомимо рассмотренной системы нами была смоделирована в Excel свертка и развертка числа в системе счисления Бергмана (рисунок 31), что также может быть использовано для демонстрации в учебном процессе.

ДЕСЯТИЧНАЯ НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

Известная всем нам в быту, да и в науке, общепринятая десятичная система счисления не всегда была позиционной. Но непозиционная система счисления может иметь такое же основание, как и позиционная. Именно это и было представлено в египетской десятичной системе счисления. Символы цифр этой системы обозначались согласно таблице 1.

Таблица 1 – Меры элементов древнеегипетских цифр

10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	100	10	1



Счетная доска в указанной системе могла выглядеть как на рисунке 1, с той разницей, что на ней счетные марки не метились соответствующими символами цифр. Счетных марок в ней десять, хотя можно было обойтись и девятью. Дополнительная марка предназначена для того, чтобы была возможность перенести десятую единицу из младшего разряда в старший, если в старшем уже отложено девять единиц. Также можно было сохранить 10 единиц в младшем разряде.

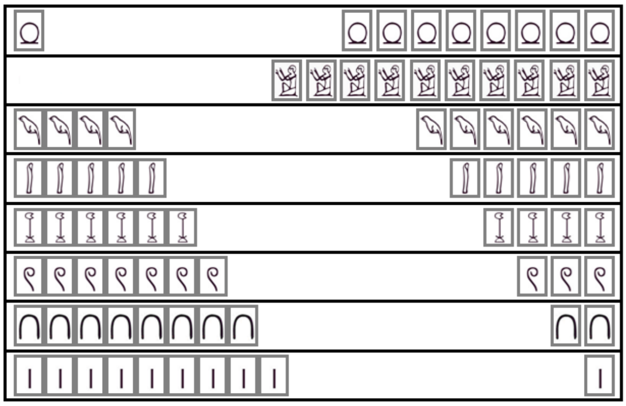


Рисунок 1 – На Египетской счетной доске отложено число 10456789

Из рисунка 1 и таблицы 2 видно, что запись числа в египетской системе счисления не была абстрактной, в ней указывалось реальное количество единиц разряда числа соответствующим символом. Иными словами, цифра состояла из определенного набора единиц, если единиц не было в разряде, то их и не записывали, и не откладывали на счетной доске. Так, в таблице 2 для обозначения двух тысяч и двух десятков используются соответствующие цифры, состоящие из двух соответствующих элементов и , а для обозначения единиц первого разряда использовалась цифра, состоящая из одного элемента . В современном же десятичном числе для обозначения двух тысяч и двух десятков используется только одна цифра 2. В разряде числа, обозначающем количество сотен, поставлена цифра 0, в древнеегипетском числе для обозначения данного разряда цифра не нужна.

Таблица 2 – Числа из древнеегипетских и современных цифр

Древнеегипетское число	
Современное десятичное число	2021

АЛФАВИТНАЯ НЕПОЗИЦИОННАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В ионийской непозиционной системе счисления опорные цифры обозначались буквами, эту систему переняли славяне, но использовали свой алфавит [4]. В разряде числа использовалась цифра, состоявшая из одного элемента, одной буквы. Цифра имела свой разрядный вес (таблицы 4-6), который показывал количество единиц, десятков или сотен в соответствующем разряде числа. Для того, чтобы отличить букву от цифры существовали надстрочные знаки в виде апострофа ’ и тильды ҃.

Таблица 4 – Цифры для обозначения числа единиц

вес цифры	1	2	3	4	5
ионийская цифра	**α’**	**β’**	**γ’**	**δ’**	**ε’**
славянская цифра	**а҃**	**в҃**	**г҃**	**д҃**	**є҃**
вес цифры	6	7	8	9	
ионийская цифра	**ς’**	**ζ’**	**η’**	**ϑ’**	
славянская цифра	**ѕ҃**	**з҃**	**и҃**	**ѳ҃**	

Таблица 5 – Цифры для обозначения числа десятков

вес цифры	10	20	30	40	50
ионийская цифра	**ι’**	**ϰ’**	**λ’**	**μ’**	**ν’**
славянская цифра	**і҃**	**к҃**	**л҃**	**м҃**	**н҃**
вес цифры	60	70	80	90	60
ионийская цифра	**ξ’**	**ο’**	**π’**	**ς’**	**ξ’**
славянская цифра	**ѯ҃**	**ѻ҃**	**п҃**	**ч҃**	**ѯ҃**

Таблица 6 – Цифры для обозначения числа сотен

вес цифры	100	200	300	400	500
ионийская цифра	**ρ’**	**σ’**	**τ’**	**υ’**	**φ’**
славянская цифра	**р҃**	**с҃**	**т҃**	**ѵ҃**	**ф҃**
вес цифры	600	700	800	900	
ионийская цифра	**χ’**	**ψ’**	**ω’**	**ϡ’**	
славянская цифра	**х҃**	**ѱ҃**	**ѿ҃**	**ц҃**	

Порядок написания цифр в славянской системе от 11 до 19 был не такой, как в современной десятичной системе: аі҃ (один(а) на десяти(і), т.е. одиннадцать). Это показано в таблице 7. Вряд ли такая запись была предназначена для вычислений.

Таблица 7 – Изменение порядка записи чисел от 11 до 19 в славянской алфавитной системе

современное число	11	12	13	14	15
славянское число	**аі҃**	**ві҃**	**гі҃**	**ді҃**	**єі҃**
современное число	16	17	18	19	
славянское число	**ѕі҃**	**зі҃**	**иі҃**	**ѳі҃**	

Итак, двадцатью семью опорными цифрами в алфавитной системе счисления можно было записать значение от 1 до 999. Помимо этих цифр имелись и специальные средства для увеличения разрядного веса цифры, о которых сказано далее.

Из таблицы 8 видно, что в древнеегипетской системе счисления для обозначения единиц, десятков и тысяч используются цифры, состоящие из двух элементов. В алфавитной ионийской и славянской системах цифры состоят только из одного элемента, что принципиально отличает ее от системы древнеегипетской, при этом в алфавитной системе не используется цифра ноль, что роднит ее с древнеегипетской системой. Помимо этого, в ионийской и славянской системах счисления используется одна и та же цифра два “β” и “в” для обозначения двух единиц и двух тысяч, при этом специальный символ, записанный перед цифрой, в ионийской “,” и славянской системе “҂” увеличивает вес цифр “β” и “в” в 1000 раз, что позволяет не использовать в алфавитной системе счисления дополнительный символ для цифры, обозначающей количество тысяч, в отличие от египетской системы. Для дальнейшего увеличения разрядного веса цифры использовалось иное средство. Так, например, для написания славянского числа, обозначающего двадцать тысяч, использовалась цифра два “в”, поставленная внутрь круга, что увеличивало ее вес 10000 раз [4] (таблица 9).

Таблица 8 – Число 2022, записанное в древнеегипетской, алфавитной системе счисления и современной десятичной системе

древнеегипетское число	𓆼𓆼𓎆𓎆𓏺𓏺
ионийское число	**,βϰβ’**
славянское число	**҂вк҃в**
современное десятичное число	**2022**

Таблица 9 – Число 20000 в современной и славянской алфавитной системе счисления

современное десятичное число	20000
славянское число	**В⃝**

ПОЗИЦИОННАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Современная десятичная система счисления перешла к нам от арабов, арабы заимствовали ее у индийцев [4]. Эта система была позиционной, и символы цифр в ней были одинаковы для всех разрядов. Вес разряда определялся положением цифры в числе, а если в разряде числа не было единиц, использовалась цифра ноль. В позиционной десятичной системе счисления арабы, индийцы и европейцы используют одни и те же цифры, но с различным начертанием, см. таблицы 10-11.

Таблица 10 – Цифры десятичной позиционной системы счисления

индийские цифры	०	१	२	३	४
арабские цифры	٠	١	٢	٣	۴
европейские цифры	0	1	2	3	4

Продолжение таблицы 10

индийские цифры	५	६	७	८	९
арабские цифры	۵	۶	٧	٨	٩
европейские цифры	5	6	7	8	9

Таблица 11 – Числа десятичной позиционной системы счисления формула для подсчета значения числа в десятичной системе счисления

Вес разряда	1000	100	10	1
индийское число	२	०	२	२
арабское число	٢	٠	٢	٢
европейское	2	0	2	2

Значения числа в любой системе счисления с одним основанием можно представить формулой 1. Множитель t есть основание системы, для десятичной системы счисления t=10.

$$P = \sum_{i}^{n} a_i t^i, \quad (1)$$

где

P – значение, записанное в число,

i – индекс текущего разряда, для дробной части $i<0$, для целой части $i \geq 0$,

n – индекс старшего разряда,

a_i – значение цифры в единицах разряда, для десятичной системы $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, в непозиционных системах счисления значение 0 выражается отсутствием цифры,

t^i – вес десятичного разряда.

АТТИЧЕСКАЯ И РИМСКАЯ ДВОИЧНО-ПЯТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Аттическая система счисления была двоично-пятеричная. Для обозначения цифр в ней использовались буквы, однако, в отличие от алфавитной системы счисления, цифра могла состоять из набора однотипных символов, совпадающих с количеством марок, отложенных на счетной доске, как в египетской системе. Аттическую систему счисления заимствовали римляне, но использовали для написания цифр свои символы. Опорные цифры аттической системы представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Цифры двоично-пятеричной системы

аттические цифры	греческие названия цифр	римские цифры	римские названия (лат.) цифр	вес разряда и значение цифры

I	иос	I	unus	1

Продолжение таблицы 12

Π	пенте(пенде)	V	quinque	5
Δ	дека	X	decem	10
𐅄	пентеконта, пенента (пененда)	L	quinquaginta	50
H	(Г)екатон, екато	C	(centum	100
𐅅	пентакосиой, пентакосиа (пендакосиа)	D	quingenit	500
X	хилион, хилиой	ↀ	Mmille	1000
𐅆	пентакихилиой	ↁ	quinque mille	5000
M	мюриой, мириой, мириад	ↂ	decem mille	10000
𐅇	пентакимюриой	ↇ	quingenit mille	50000

Хотя и считается, что для записи цифр римской системы счисления использовались исключительно буквы, но скорее здесь использовался геометрический принцип (таблица 13).

Таблица 13 – Геометрическая основа римских цифр

цифра	значение	иное изображение	геометрия
I	1	I	линия
V	5	V	острый угол
X	10	X	два острых угла
L	50	L	прямой угол
C	100	логичней изображать так: ⊏	два прямых угла
D	500	D	полукруг
M	1000	в иных вариантах: ↀ	круг
нет	10000	ↁ	два полукруга
нет	50000	ↂ	два круга
нет	…	число N полукругов растет	N полукругов
нет	…	число N кругов растет	N кругов

Нетрудно заметить (таблица 12), что в двоично-пятеричной системе счисления вес последующего двоичного разряда в десять раз больше предыдущего, так же, как и вес последующего пятеричного разряда. Это позволяет использовать двоичный и пятеричный разряды в совокупности как десятичный, что и отражается на счетной доске в двух счетных полосах, расположенных на одном уровне (рисунок 2, 3).

Рисунок 2 – Отображение чисел на счетной доске

Рисунок 3 – Счетная доска с дополнительными марками

Как видно из рисунка 3, двоичная цифра младшего разряда состоит из набора однотипных символов IIII, то же может быть для любого двоичного разряда. Сокращенные записи римских цифр IV (а не IIII), IX(а не VIIII) и т.д. не предназначены для вычислений [4]. Доказательством того, что сокращенная запись римских цифр появилась позже, может служить древнеримский календарь с соответствующими цифрами (рисунок 4).

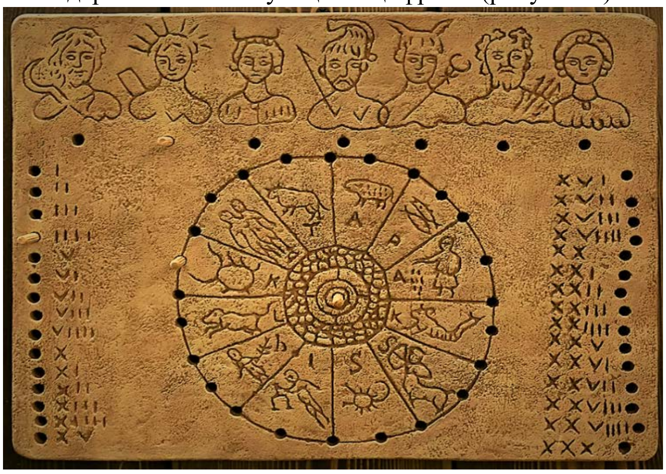


Рисунок 4 – Древнеримский каменный календарь III-IV(IIII) нашей эры

Сложение марок в пятеричном разряде представлено в таблице 14. Аналогичны формулы и для всех старших разрядов, причем в формулах используются цифры соответствующего разряда. Если количество добавляемых единиц превышало допустимое, добавляли марку в старший разряд +X, а в младшем сбрасывали марку 0→.

Таблица 14 – Сложение единиц в пятеричном разряде

№	V
сброшено	V
V	+X 0→

Сложение марок в двоичном разряде представлено нами в таблице 15. Если количество добавляемых единиц превышало допустимое, добавляли марку в старший разряд +V, а в младшем либо сбрасывали все марки 0→, либо добавляли соответствующее число марок (+I I+I идр.), либо оставляли соответствующее число марок (I→ II→) путем сброса лишних.

Таблица 15 – Сложение единиц в двоичном разряде

№	+I	+II	+III	+IIII
сброшено	+I	+II	+III	+IIII
I	I+I	I+II	I+III	+V 0→
II	II+I	II+II	+V 0→	+V I→
III	III+I	+V 0→	+V I→	+V II→
IIII	+V 0→	+V I→	+V II→	+V III→

На рисунке 3 в счетные полосы добавлена дополнительная марка, она предназначена для того, чтобы можно было добавить единицу в разряд числа из предыдущего разряда, даже если в нем отложено предельное число марок для разряда. Более опытные счетоводы обходились доской на рисунке 2.

Вычитание марок из двоичного разряда осуществлялось по таблице 16. Если в разряде было больше марок, чем вычитаемых, сбрасывали излишние марки, оставляя результат вычитания (I→, II→, III→). Если в разряде было отложено меньшее марок, чем вычитаемых, сбрасывали марку из старшего разряда -V, а в младшем добавляли соответствующее число марок (+IIII и д.р.).

Таблица 16 – Вычитание единиц из двоичного разряда

№	-I	-II	-III	-IIII
сброшено	-V +IIII	-V +III	-V +II	-V +I
I	сброшено	-V I+III	-V I+II	-V I+I
II	I→	сброшено	-V I+III	-V II+I
III	II→	I→	сброшено	-V III+I
IIII	III→	II→	I→	сброшено

Вычитание марок из пятеричного разряда осуществлялось по таблице 17. Если в разряде было отложено меньше марок, чем вычитаемых, сбрасывали марку из старшего разряда -X, а в младшем добавляли марку +V.

Таблица 17 – Вычитание единиц пятеричного разряда

№	-V
сброшено	-X +V
V	сброшено

Если невозможно было произвести заем марок из предыдущего разряда, занимали марки из идущего перед предыдущим. Например, если нужно было вычесть число V из числа L, марка из разряда L счетной доски сбрасывалась, а в разряде X откладывалось 5 марок (счетная доска на рисунке 3), одну из которой можно было сбросить при вычитании V (таблица 18).

Таблица 18 – Процесс вычитания из числа L числа V

№	Отложено	№	Отложено	Примечание
L		X		отложено число L
L		X		заем пяти единиц из старшего разряда (сброшена марка в разряде L и отложено пять марок в разряде X)
L		X		процесс вычитания 1 (сброшена марка в разряде X)
V		I		процесс вычитания 2 (отложена марка в разряде V)

Таким образом, в результате выполнения действии на счетной доске, показанных в таблице 18, произведено действие L-V=XXXXV, что видно из последних двух строк таблицы. Умножение чисел в пятеричном разряде представлено в таблице 19. Согласно представленной таблице, в старший разряд добавляли соответствующее число марок (+X, +XX), а в младшем либо сбрасывали марку 0→, либо оставляли ее (V).

Таблица 19 – Умножение в пятеричном разряде

№	*II	*III	*IIII	*V
сброшено	сброшено	сброшено	сброшено	сброшено
V	+X 0→	+X V	+XX	+XX V

Умножение чисел в двоичном разряде представлено в таблице 20. Согласно представленной таблице в старший разряд добавляли соответствующее число марок (+V, +X, +XX), а в младшем либо сбрасывали все марки 0→, либо добавляли соответствующее число марок (+I, +II и др.), либо сбрасывали излишние марки (I→, II→, III→).

Таблица 20 – Умножение в двоичном разряде

№	*II	*III	*IIII	*V
сброшено	сброшено	сброшено	сброшено	сброшено
I	I+I	I+II	I+III	+V 0→
II	II+II	+V I→	+V I+II	+X 0→
III	+V I→	+V III+I	+X II→	+X +V 0→
IIII	+V III→	+X II→	+X +V I→	+XX 0→

При добавлении марок в старший разряд при умножении, естественно, производили и суммирование марок с другими марками по всем правилам сложения на счетной доске.

Деление чисел в двоичном разряде представлено в таблице 21. Согласно представленной таблице в старшем разряде либо сбрасываются все марки 0→, либо оставляются марки путем сброса излишних (XX→, X→), а в младшем разряде добавляется соответствующее число марок (+IIII и др.).

Таблица 21 – Умножение в двоичном разряде

№	/II	/V
сброшено	сброшено	сброшено
XXXX	XX→	0→ +V +IIII
XXX	X→ +V	0→ +V +I
XX	X→	0→ +IIII
X	+V	0→ +II

Деление чисел в пятеричном разряде представлено в таблице 22. Согласно представленной таблице, в старшем разряде сбрасываются все марки 0→, а в младших добавляется соответствующие число марок (+XX, +V или +X).

Таблица 22. Деление в пятеричном разряде

№	/II	/V
сброшено	сброшено	сброшено
L	0→ +XX +V	0→ +X

Таким образом, рассмотрена римская счетная доска и как производились на ней четыре арифметических действия. Указанная доска позволяет делить числа без остатка только на 2 и 5. При использовании вавилонской системы счисления делителей значительно больше, вавилонская система счисления будет описана в следующем разделе.

Значения числа в двоично-пятеричной системе счисления на основании формулы (1) можно выразить формулой 2.

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i v_i} + \sum_{\mathrm{j}=-1}^{\mathrm{m}} \mathrm{b_j w_j}, \qquad (2)$$

где

P – значение, записанное в число,

i, j – индексы текущего целого и дробного разряда,

n, m – индексы последнего целого и дробного разряда,

ai bj – значения в целом и дробном разряде числа,

$$a_i \in \begin{cases} \{0,1,2,3,4\}, & i \bmod 2 = 0 \\ \{0,5\}, & i \bmod 2 \neq 0 \end{cases}$$
$$b_j \in \begin{cases} \{0,1,2,3,4\}, & j \bmod 2 = 0 \\ \{0,5\}, & j \bmod 2 \neq 0 \end{cases},$$

vi wj – веса в целом и дробном разряде

$$v_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ v_{i-1} \times 2, & i \bmod 2 = 0 \\ v_{i-1} \times 5, & i \bmod 2 \neq 0 \end{cases} \quad w_j = \begin{cases} 0.5, & j = -1 \\ \frac{w_{j-1}}{5}, & j \bmod 2 = 0 \\ \frac{w_{j-1}}{2}, & j \bmod 2 \neq 0 \end{cases}$$

Дробные разряды на счетной доске отделяются от не дробных пустыми счетными полосами (рисунок 5).

Если соседний двоичный и пятеричный разряд играют роль одного десятичного, приходим к формуле 3.

$$P = \sum_{i}^{n} (a_i + b_i) 10^i, \qquad (3)$$

где

P – значение, записанное в число,

i – индекс текущего составного десятичного разряда,

n – индекс последнего разряда,

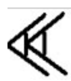
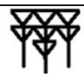
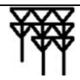
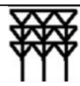
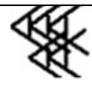
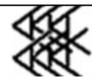
ai bi – значения пятеричного и двоичного разряда,

10^i – вес десятичного составного разряда.

ВАВИЛОНСКАЯ ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Говоря о вавилонской системе счисления, надо отметить, что для изображения цифр разряда в ней использовались принципы древнеегипетской системы. В то же время она имела два основания, подобно системе римской. Два соседних разряда шестеричный и десятичный в совокупности выполняли функцию одного шестидесятеричного. Элемент цифры представлял собой клин, направленный вниз и влево. Из элементов набирались цифры одного разряда (таблица 23), о цифре со значением 60 будет сказано далее.

Таблица 23 – Цифры одного разряда

цифра	значение	цифра	значение	цифра	значение
	1		6		20
	2		7		30
	3		8		40
	4		9		50
	5		10		60

Цифры из двух разрядов сливались, как видно из таблицы 24.

Таблица 24 – Пример двухразрядной цифры

цифра двух разрядов	значение
	21

Как видно из рисунка 5, вес последующего шестеричного разряда, представленного на счетной доске, больше в 60 раз предыдущего, так же как и вес последующего десятичного разряда больше предыдущего в 60 раз. Это позволяет использовать шестеричный и десятеричный разряды в совокупности как шестидесятеричный, что и отражается на счетной доске в двух счетных полосах, расположенных на одном уровне (рисунок 5).

Рисунок 5 – Вавилонская счетная доска (реконструкция) и отображенные на ней значения

Счетные полосы 1-4 предназначены для вычисления целой части числа, а полосы 5-6 для вычисления дробной части.

Вавилонская система счисления удобна для выполнения операций деления на счетной доске и отображения различных дробей, потому что число 60 делится на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Шестидесятеричные доли выражаются следующим числом отложенных марок.

Таблица 25 – Доли отложенных марок в предыдущем разряде

доли	отложено в разряде <	отложено в разряде V	доли	отложено в разряде <	отложено в разряде V
1/60			1/6		
1/30			1/6		
1/20			1/5		
1/15			1/4		
1/12			1/3		
1/10			1/2		

Дробь 1/60 можно изобразить так:

Число 60 на доске на 60-ричной доске можно представить следующими двумя способами.

Таблица 26 – Вес марки старшего разряда относительно предыдущего

№ счетной полосы	отложено в разряде <	вес разряда	отложено в разряде V	вес разряда	цифра в разряде
3		600		60	
4		10		1	
…	…	…	…	…	…
3		600		60	
4		10		1	

Цифра 60, обозначенная на счетной доске вторым способом, показана здесь не случайно. Дело в том, что в вавилонской системе ноль отсутствовал [3, 4], и поэтому возникали трудности при чтении чисел 1, 60, 3600, 216000. Помимо этого, возникали другие трудности в чтении числа, если между двумя непустыми разрядами были пустые разряды, в которых не отложены марки на счетной доске. Очевидно, что при записи таких чисел требовался поясняющий текст. Но без него можно было бы обойтись, используя указанную цифру, что видно из таблицы 27.

Таблица 27. Вавилонские цифры без применения нуля

Позиционная система счисления жрецов майя

60	61	3600	3601	216000	216001

Жрецы майя разработали двадцатеричную систему счисления, правда, порядок системы нарушался в третьем разряде числа, он был больше предыдущего лишь в 18 раз, это было связано с астрономическими вычислениями [5, 6]. Цифры для всех разрядов были одинаковы, точка в цифре обозначала единицу разряда, а линия пять единиц. Цифра ноль обозначалась в виде раковины.

Таблица 28 – Цифры жрецов майя

цифра	значение	цифра	значение	цифра	значение	цифра	значение
	0		5		10		15
	1		6		11		16
	2		7		12		17
	3		8		13		18
	4		9		14		19

Из-за нарушения порядка системы счисления в третьем разряде, во втором разряде использовалось только 18 цифр. Цифры в системе счисления жрецов майя располагались одна над другой, как видно из рисунка 6. Пятерки (пять единиц) изображались красными, темными марками, а единицы желтыми. Для отображения трех пятерок во втором сдвоенном разряде их приходилось обозначать пятью марками в левой части разряда и двумя марками в правой.

Рисунок 6 – Счетная доска майя (реконструкция) и отложенные на ней значения

СОВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Одной из систем счисления, используемых в настоящее время, является двоичная система счисления. В ней используется следующий набор цифр {0, 1}. Надо отметить, что в римской системе счисления тоже был двоичный разряд числа, но в отличие от современной двоичной системы в нем могло содержаться четыре единицы, а не одна, что было связано с двумя основаниями римской системы. Каждый новый разряд числа в современной двоичной системе больше предыдущего в два раза. Данная система удобна для автоматизации счета на компьютере.

Двоичное целое число в памяти компьютера хранится в байтах, байт состоит из 8 бит, бит это минимальный элемент памяти, содержащий двоичный разряд со значениями ноль или единица. Единица в бите и обозначается высоким уровнем сигнала, а ноль – низким. В таблице 29 представлено двоичное число 10000010, размещенное в байте.

Таблица 29 – Представление целого двоичного числа 10000010 в байте

Вес бита	128	64	32	16	8	4	2	1
Значение	1	0	0	0	0	0	1	0

Как показано в таблице 29, вес последующего бита в два раза больше предыдущего. Если перемножить значения битов на их веса и сложить, то будет ясно, что в байте записано десятичное число 130. Людям удобно использовать более компактное десятичное позиционное число 130, но в электронном счетном устройстве удобно двоичное число для вычислений и представлений. Надо отметить, что представление двоичного числа ноль на бумажном носителе можно представить только одной цифрой 0. В то время, как в байте, число 0 представляется 8 разрядами.

Таблица 30 – Представление целого числа 0 в байте

Вес бита	128	64	32	16	8	4	2	1
Значение	0	0	0	0	0	0	0	0

Для сокращения записи двоичного числа на бумаге можно использовать 16-ричную позиционную систему счисления, набор цифр в ней таковой: {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Значение цифр, обозначаемых буквами цифр в десятичной системе счисления, следующие: A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15.

Байт можно условно разбить на два полубайта и тем “обозначить” в нем шестнадцатеричное число. На рисунке 7 показано, как представляется шестнадцатеричное число в памяти компьютера и на письме.

веса старшего полубайта				веса младшего полубайта				16-ричное число	
8	4	2	1	8	4	2	1	16	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	0	0	1	1	0	3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
0	0	0	0	0	1	0	1	0	5
0	0	0	0	0	1	1	0	0	6
0	0	0	0	0	1	1	1	0	7
0	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	0	1	0	0	1	0	9
0	0	0	0	1	0	1	0	0	A
0	0	0	0	1	0	1	1	0	B
0	0	0	0	1	1	0	0	0	C
0	0	0	0	1	1	0	1	0	D
0	0	0	0	1	1	1	0	0	E
0	0	0	1	1	1	1	1	1	F

Рисунок 7 – Представление шестнадцатеричного числа

Из последней строки рисунка 7 следует, что двоичное число 11111 можно записать более компактно в шестнадцатеричной системе, только двумя цифрами 1F.

Рассмотрим еще оригинальную современную систему счисления Бергмана. В этой системе используются двоичные цифры {1, 0}, что позволяет записать число Бергмана в память компьютера. В качестве основания используется иррациональное число, выраженное формулой 4 [7, 8] «золотая пропорция» или «золотое (божественное) сечение»).

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

Интересно то, что для системы Бергмана справедливо соотношение весов разрядов, выраженное в формуле 5 [8].

$$t^i = t^{i-1} + t^{i-1} \tag{5}$$

Т.е. единицу в разряде i можно выразить двумя единицами предыдущих разрядов i-1 i-2. Если мы выражаем единицу разряда левой частью формулы 5, это называется сверткой, если правой, это называется разверткой.

В таблице 31 представлена свертка и развертка числа 1. Согласно формуле 2, вес разряда, с которого начинается счет, будет равен $t^0 = 1$. Т.к. в позиционной системе счисления вес старшего разряда больше предыдущего в t раз, то вес разряда, расположенного слева от разряда, с которого начался счет, можно выразить формулой 4. Веса разрядов, расположенные правее разряда, с которого начинается счет, можно выразить соответствующими формулами, записанными в первой строке таблицы 31. Указанные веса вычислены в электронной таблице, и, несмотря на то, что вычисленные веса по рассмотренным формулам представляются как рациональное число, полученное округлением числа иррационального, на данной модели можно осуществлять свертку и развертку числа один, что видно из таблицы 31. Аналогично и в вавилонской системе счисления на счетной доске можно было выразить единицу старшего разряда единицами двух младших сдвоенных разрядов (таблица 26).

Таблица 31 – Моделирование свертки и развертки числа один

Формулы для вычисления весов	t	t^0	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t^2}$	-
округленные значения весов разрядов	1,618	1	0,618	0,382	сумма произведений значения весов на значения в разрядах числа
свертка	0	1	0	0	1
развертка	0	0	1	1	1

Число два в системе счисления Бергмана набирается из свернутого и развернутого числа один (таблица 31, таблица 32 строка №1). Применяя свертку для старших разрядов с весом один и 0,618, получим иное представление числа два (таблица 32 строка №2).

Таблица 32 – Различные представления числа два

Округленные значения весов	1,618	1	0,618	0,382	Сумма произведений значения весов на значения в разрядах числа
№1	0	1	1	1	2
№2	1	0	0	1	2

Число три в системе счисления Бергмана набирается из числа два (таблица 32 строка №2) и свернутого числа один (таблица 31 строка «свертка»), в результате получаем число три (таблица 33 строка №1).

Таблица 33 – Различные представления числа три

Округленные значения весов	1,618	1	0,618	0,382	сумма произведений значения весов на значения в разрядах числа
№1	1	1	0	1	3

Таким образом, применяя свертку для старших разрядов и добавляя единицу в разряд с весом один, можно выразить любое целое положительное число в системе счисления Бергмана. Возникает вопрос, а может ли быть представлено целое число в рассматриваемой системе, если вес числа будет в виде иррационального, а не округленного рационального числа. Ответ на это положительный. Известна формула в теории чисел Фибоначчи и «золотого сечения», выражающая [8].

$$t^i = \frac{L_{i+}F_i\sqrt{5}}{2}\ , \qquad (6)$$

где

ti – вес i разряда в системе счисления Бергмана,

Fi – расширенное число Фибоначчи, опорные цифры F0 = 0, F1 = 0, для целых разрядов справедливо, для дробных справедливо,

Li – расширенное число Люка, опорные цифры L0 = 0, L1 = 0, для целых разрядов справедливо, для дробных справедливо.

Составляем таблицу 34, в которой в строке №1 записано число три из таблицы 33, в строке i записан индекс разряда, в соответствующих строках записаны цифры Фибоначчи и Люка, а в соответствующей строке записаны веса разрядов формулой 5.

Таблица 34 – Индекс разрядов, числа Фибоначчи и Люка, веса и разряды

i	1	0	-1	-2
F_i	1	0	1	-1
L_i	1	2	-1	3
t_i	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2}{2}=1$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
№1	1	1	0	1

Просуммируем веса разрядов, содержащих 1 (7).

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6}{2}=3 \qquad (7)$$

Таким образом, исключился из числителя при вычислении суммы произведений весов на разряды, и в числителе образовалось число, кратное знаменателю. Аналогичные ситуации будут происходить со всеми натуральными числами, представленными в системе Бергмана.

В системе Бергмана можно представить и иррациональное число конечным набором цифр (8). Например, число в системе Бергмана 10,1 согласно весам, представленным в таблице 34, будет равно.

$$10{,}1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+0+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5} \qquad (8)$$

А является иррациональным числом, хотя и выражается конечным набором 10,1.

Заключение

Из рассмотренных систем счисления видно, что первоначально в числах повторялось количество отложенных марок в полосах счетной доски повторением соответствующего символа цифры, это видно из древнеегипетской, вавилонской и римской системы. Система жрецов майя близка к указанному принципу. В алфавитных ионийской и славянской системах счисления цифрой, состоящей только из одной буквы, показывалось количество отложенных марок в разрядах счетной доски. Это было более компактной записью числа. Тем не менее, алфавитная система счисления не была позиционной, если в разряде счетной доски ничего не было отложено, цифры ноль не требовалось для записи числа (таблица 8). Несмотря на то, что вавилонская система счисления и система счисления майя были позиционные, написание цифр в них весьма затруднительно, по сравнению с цифрами современных систем счисления. Вавилонская система счисления хотя и была позиционной, при отсутствии нуля приходилось добавлять дополнительную цифру 60 и повторять определенное состояние счетной доски в числе, что также неудобно (таблица 27). Римская, вавилонская система счисления были с двумя основаниями. В вавилонской системе счисления это было связано с тем, чтобы сократить число марок в полосе счетной доски, при этом приходилось делить счетную полосу на две части с десятками и единицами шестидесятеричного разряда (рисунок 5), зато, для написания шестидесятеричных цифр можно было использовать только два вида символов. Если рассматривать римскую систему как десятичную, то для записи цифры в сдвоенном десятичном разряде требуется меньше символов цифр, чем в древнеегипетской системе. Разбиение разряда на две части в римской системе так же позволяло при операции умножения использовать таблицу умножения только до размера 5Х5.

Несмотря на то, что древнеегипетская, алфавитные ионийская и славянская системы счисления были десятичные, они не смогли выдержать конкуренцию перед позиционной десятичной системой. Главным образом из-за использования в позиционной системе счисления меньшего количества цифр и простоты в их написании.

В заключение можно сказать, что позиционные системы счисления с одним основанием выдержали конкуренцию с непозиционными системами. В современных позиционных системах счисления используется цифра ноль. Количество цифр в современных позиционных системах, как правило, равно основанию, исключение составляет система Бергмана, которая примечательна тем, что в ней можно выразить иррациональное число конечным набором цифр.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Гутер Р.С., Полунов Ю.Л., От абака до компьютера, – М.: “Знание”, 1982. –208 с.
[2] Тихвинский В.И., Предыстория автоматизации вычислений в докомпьютерную эпоху, –М.: Менеджмент и бизнес-администрирование, №3, 2015 –199-202 с.
[3] Выгодский М.Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, –М.: Наука, 1967. –367 с.
[4] Депман И.Я., История арифметики, –М.: Министерство Просвещения, 1959. –405 с.
[5] Кузьмищев В., Тайна жрецов Майя, 1968, –357 с.
[6] Ершова Г. Г., Майя: тайны древнего письма, –М.: Алетейа, 2004. –296 с.
[7] Bergman G. A. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, 1957, No. 31, 98-119.
[8] Стахов А.П., Система счисления Бергмана и новые свойства натуральных чисел, Институт Золотого Сечения - Математика Гармонии (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm)

Статья получена 07.04.2022 г.
В.И. Тихвинский, МИРЭА (e-mail: tvitaly1@yandex.ru).
В.В. Холмогоров, МИРЭА (e-mail: Hvv13@mail.ru).

Numeral systems in antiquity and modernity

V. I. Tikhvinsky, V.V. Kholmogorov

Abstract – **Mankind has long sought to simplify the computational process. Having divided counting units into digits, it came up with a number system [1]. The number system is a way of writing numbers with special characters. The number in such a record shows the number of ones in the digit of the number. A number is a set of one or more digits that determines the total number of units calculated. A unit is a measure for counting something.**

A number system can have one or more bases. The base shows how many times the unit of the next digit is greater than the unit of the previous one. In a system with more than one base, several digits can play the role of one, as will be shown later. The digit of the number has a weight that determines how many times the number of units of the current digit is greater than the units from which the counting began.

There are non-positional number systems in which the digit determines both the number of units in the digit of the number and the weight of this digit. In positional number systems, the weight of the digit depends on the position of the digit in the numerical set.

Initially, the number systems were non-positional, writing their numbers was associated with a counting board. The counting board was a field divided into stripes, in other words, recesses. Counting stamps moved in the stripes [2]. The stamps were deposited on the left side of the counting board and discarded on the right side. The number of stamps set aside determined the number of calculated units. To record set aside units by a scribe on papyrus or other medium for a particular brand of counting board discharge, a specific symbol was used to indicate both the counted unit on the counting board and the weight of the discharge. The digit could consist of a set of symbols of the same type that determine the number of units in the digit [3], which will be shown in the examples below.

Key words - **number systems, counting units, numbers, numbers, counting boards, digit weight.**

REFERENCES

[1] R.S. Guter, Yu.L. Polunov, From the abacus to the computer, - M .: “Knowledge”, 1982. -208 p.

[2] Tikhvinsky V.I., Prehistory of computing automation in the pre-computer era, -M .: Management and business administration, No. 3, 2015 -199-202 p.

[3] Vygodsky M.Ya., Arithmetic and algebra in the ancient world, -M.: Nauka, 1967. -367 p.

[4] Depman I.Ya., History of arithmetic, -M.: Ministry of Education, 1959. -405 p.

[5] V. Kuzmishchev, Mystery of the Maya Priests, 1968, -357 p.

[6] Ershova G. G., Maya: secrets of ancient writing, - M .: Aleteya, 2004. -296 p.

[7] Bergman G. A. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, 1957, no. 31, 98-119.

[8] Stakhov A.P., Bergman number system and new properties of natural numbers, Institute of the Golden Section - Mathematics of Harmony (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm)