Теоретико-игровой анализ равновесий для сетевого рынка с тремя узлами

Ногай Элеонора Адольфовна

Аннотация - **В статье приведены результаты анализа возможных равновесий по Нэшу в модели конкуренции Курно для сетевого рынка с тремя узлами без активных ограничений пропускной способности. Для каждого типа получены условия первого порядка, позволяющие рассчитывать соответствующее равновесие.**

Ключевые слова: **Локальный рынок; модель Курно; равновесия Нэша; сетевой аукцион; трехузловой сетевой рынок.**

I. Введение

Для поиска эффективных механизмов взаимодействия производителей и потребителей в области энергетики обычно используются методы теории игр [1-3]. В качестве модели поведения игроков обычно рассматриваются ситуации равновесия Нэша соответствующей игры. Исследованию аукциона Курно посвящено множество работ [4-7], в которых определяются равновесные исходы игры и исследуются свойства этих равновесий в зависимости от параметров рынка. Большая часть этих работ не учитывает сетевую структуру рынка, а другая часть учитывает в основном двухузловую сетевую структуру рынка. В настоящее время актуальным является исследование равновесий в различных типах трехузловых сетевых рынках.

Целью данной работы является анализ возможных равновесий по Нэшу в модели конкуренции Курно для сетевого рынка с тремя узлами без активных ограничений пропускной способности.

II. Необходимые Определения и Подготовительные Сведения

Формальная модель аукциона Курно для трехузлового рынка.

Каждый локальный рынок $i = 1,2,3$ характеризуется функцией спроса $D_i(p)$, конечным множеством A_i производителей и функциями затрат $C^a(v)$, $a \in A_i$. Коэффициент потерь k_{ij} показывает долю утраченного товара при передаче товара из узла i в узел j. Обозначим $\lambda_{ij} = (1-k)^{-1}$. Пропускная способность при передаче из узла i в узел j составляет Q_{ij}.

Стратегией производителя a является его объем производства $v^a \in [0, V^a]$. Обозначим $\vec{v}_i = (v^a, a \in A_i)$ - набор стратегий производителей i-го рынка; $\vec{v} = (v^a, a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ - набор стратегий всех производителей. Цены отсечения на изолированных рынках $\overline{p}_i$ определяются из условий: $D_i(\overline{p}_i) = \sum_{A_i} v^a$, $i = 1,2,3$. Если $\lambda_{ji}^{-1} \le \dfrac{\overline{p}_j}{\overline{p}_i} \le \lambda_{ij}$, $i, j = 1,2,3$, то рынки останутся изолированными.

В противном случае узловые цены $p_i(\vec{v}), i = 1,2,3$, и величины потоков q_{ij} из узла i в узел j ($i \ne j; i, j = 1,2,3$) удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{A_i} v^a = D_i(p_i) + \sum_{j \ne i} I_{ij} q_{ij} - \sum_{j \ne i} I_{ji} \lambda_{ji}^{-1} q_{ji}, \quad i = 1,2,3. \qquad (2.1)$$

где $I_{ij} = 1$, если идет поток из узла i в узел j, $I_{ij} = 0$, если из узла i в узел j товар не передается; причем если $q_{ij} = 1$, то $q_{ji} = 0$. Кроме того, если идет переток из узла i в узел j, то либо ограничение пропускной способности неактивно $(0 < q_{ij} < Q_{ij})$ и тогда $\lambda_{ij} p_i = p_j$; либо поток равен пропускной способности $(q_{ij} = Q_{ij})$ и $\lambda_{ij} p_i \le p_j$. Если перетока товара между рынками i и j не происходит $(q_{ij} = q_{ji} = 0)$, то справедливо $\lambda_{ji}^{-1} < \dfrac{p_j}{p_i} < \lambda_{ij}$. Прибыль производителя a может быть рассчитана по методике работы [3] $P^a(\vec{v}) = v^a p_i(\vec{v}) - C^a(v^a)$, и модели Курно для трехузлового рынка соответствует игра в нормальной форме:

$$G = \left\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3, [0, V^a], P^a(\vec{v}), \vec{v} \in \right.$$
$$\left. \in \bigotimes_{a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3} [0, V^a], a \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \right\rangle.$$

Ногай Э.А., магистр факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова,
e-mail: linora90-00@mail.ru
Работа представляет собой результат магистерской диссертации.

III. Основные результаты

РАВНОВЕСИЯ БЕЗ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ.

Заметим, что в равновесиях без активных ограничений пропускной способности потоки могут быть не более, чем на двух ребрах.

Начнём с анализа случая, когда в равновесии рынки остаются изолированными (равновесие типа 1), то есть когда равновесные цены p_i^*, $i=1,2,3$, удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda_{21}^{-1} < \frac{p_2^*}{p_1^*} < \lambda_{12},\ \lambda_{32}^{-1} < \frac{p_3^*}{p_2^*} < \lambda_{23},\ \lambda_{13}^{-1} < \frac{p_1^*}{p_3^*} < \lambda_{31}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для равновесия типа 1 условия первого порядка принимают следующий вид:

$\nu^{a*} \in (p_i^* - C^{a'}(\nu^{a*}) \,|\, D_i'(p_i^*))|$ для любого $a \in A_i$ такого,

$$\text{что } C^{a'}(0) < p_i^*, \tag{3.1}$$

$$\nu^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \ge p_i^*, \tag{3.2}$$

где $C^{a'}(\nu) = [C_-^{a'}(\nu), C_+^{a'}(\nu)]$ в точках скачка функции предельных затрат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Запишем условие равенства спроса и предложения на каждом рынке, учитывая, что между рынками нет перетока товара:

$$\sum_{A_i} \nu^a = D_i(p_i),\ i=1,2,3. \tag{3.3}$$

Следовательно, условия первого порядка для равновесия типа 1 совпадают с условиями первого порядка для локального рынка, откуда получим (3.1-3.2).

□

Обозначим $S_C^{ia}(p)$ функцию предложения Курно производителя a для i-го рынка, определяемую из (3.1-3.2); $S_C^i(p) = \sum_{A_i} S_C^{ia}(p)$. Таким образом, равновесная цена на i-ом рынке рассчитывается из условия:

$$S_C^i(p_i^*) = D_i(p_i^*). \tag{3.4}$$

Далее рассмотрим случаи, когда поток идет по одному ребру при неактивном ограничении пропускной способности (равновесия типа 2). Передачу товаров из узла i в узел j изобразим пунктирной линией со стрелкой соответствующего направления, если ограничение пропускной способности неактивно. Такие исходы изображены с точностью до перенумерации узлов на рисунке 1а.

Без ограничения общности будем считать, что товар передается из первого узла во второй. В равновесии типа 2

$$q_{12} \in (0, Q_{12}),\ q_{23} = q_{32} = q_{13} = q_{31} = 0,$$

$$\lambda_{12} p_1^* = p_2^*,\ \lambda_{32}^{-1} < \frac{p_3^*}{p_2^*} < \lambda_{23},\ \lambda_{13}^{-1} < \frac{p_1^*}{p_3^*} < \lambda_{31}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для равновесия типа 2 условия первого порядка для $a \in A_1$ принимают вид:

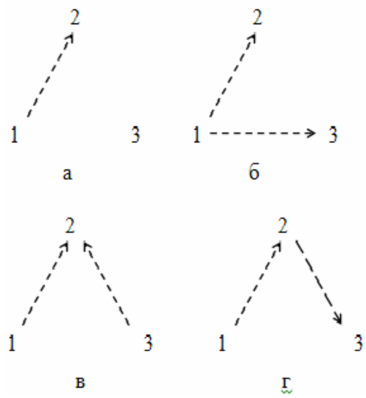

Рис. 1. Схематическое изображение фрагментов передачи товаров между рынками по линиям связи в трехузловой сети.

$$\nu^{a*} \in (p_1^* - C^{a'}(\nu^{a*})) \,|\, D_1'(p_1^*) + {}$$
$$+ \lambda_{12}^2 D_2'(\lambda_{12} p_1^*)|,$$

$$\text{если } C^{a'}(0) < p_1^*, \tag{3.5}$$

$$\nu^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \ge p_1^*; \tag{3.6}$$

для производителей $a \in A_2$:

$$\nu^{a*} \in (\lambda_{12} p_1^* - C^{a'}(\nu^{a*})) \,|\, D_2'(\lambda_{12} p_1^*) + {}$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{12}^2} D_1'(p_1^*)|,$$

$$\text{если } C^{a'}(0) < p_2^*, \tag{3.7}$$

$$\nu^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \ge p_2^*; \tag{3.8}$$

для $a \in A_3$ - совпадают с (3.1-3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как третий рынок остается изолированным, то для него $\sum_{A_3} \nu^a = D_3(p_3)$ и условия первого порядка совпадают с условиями первого порядка для локального рынка.

Рассмотрим условия баланса спроса и предложения на первом и втором рынках:

$$D_1(p_1) = \sum_{A_1} \nu^a - q_{12} \tag{3.9}$$

$$D_2(\lambda_{12} p_1) = \sum_{A_2} \nu^a + \lambda_{12}^{-1} q_{12}. \tag{3.10}$$

Выразив из уравнения (3.10) поток $q_{12} = \lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1) - \sum_{A_2} \nu^a)$ и подставив его в (3.9), получим соотношение:

$$\sum_{A_1} \nu^a = D_1(p_1) + \lambda_{12}(D_2(\lambda_{12} p_1) - \sum_{A_2} \nu^a). \tag{3.11}$$

Таким образом, при любом малом изменении стратегии ν^{a*} производитель $a \in A_1$ остается на рынке с функцией спроса

$D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a)$. Зная функцию спроса согласно [3], можно получить условия первого порядка (3.5-3.6).

Аналогично, для производителей на втором рынке спрос составляет $D_2(\lambda_{12}p_1)+\lambda_{12}^{-1}(D_1(p_1)-\sum_{A_1}\nu^a)$, и условия первого порядка для $a\in A_2$ принимают вид (3.7-3.8). □

Обозначим $S^{1a}_{C1-2}(p)$ отображение, определяемое из (3.5-3.6); аналогично, $S^{2a}_{C1-2}(p)$ - отображение, определяемое из (3.7-3.8); $S^{i}_{C1-2}(p)=\sum_{A_i}S^{ia}_{C1-2}(p)$, $i=1,2$. Таким образом, равновесная цена p_1^* рассчитывается из условия:

$$S^1_{C1-2}(p_1^*)+\lambda_{12}S^2_{C1-2}(\lambda_{12}p_1^*)=$$
$$=D_1(p_1^*)+\lambda_{12}D_2(\lambda_{12}p_1^*).$$

Для равновесной цены p_3^* справедливо $S^3_C(p_3^*)=D_3(p_3^*)$.

Обратимся к анализу равновесий с перетоком по двум ребрам при неактивных ограничениях пропускной способности (см. рис. 1 б-г). Сначала рассмотрим равновесия, в которых из одного узла идет переток в два другие (равновесия типа 3). На рисунке 1б изображена конфигурация, соответствующая этому случаю с точностью до перенумерации узлов.

Без ограничения общности будем считать, что товар передается из первого узла во второй и третий. В равновесии типа 3

$$q_{12}\in(0,Q_{12}),\ q_{13}\in(0,Q_{13}),\ q_{23}=q_{32}=0,$$
$$\lambda_{12}p_1^*=p_2^*,\ \lambda_{13}p_1^*=p_3^*,\ \lambda_{32}^{-1}<\frac{p_3^*}{p_2^*}<\lambda_{23}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 Для равновесия типа 3 условия первого порядка для $a\in A_1$ принимают вид:

$$\nu^{a*}\in(p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_1'(p_1^*)+$$
$$+\lambda_{12}^2D_2'(\lambda_{12}p_1^*)+\lambda_{13}^2D_3'(\lambda_{13}p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_1^*$, (3.12)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\geq p_1^*$; (3.13)

для производителей $a\in A_2$:

$$\nu^{a*}\in(\lambda_{12}p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_2'(\lambda_{12}p_1^*)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_{12}^2}D_1'(p_1^*)+\left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}\right)^2D_3'(\lambda_{13}p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_2^*$, (3.14)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\geq p_2^*$; (3.15)

для производителей $a\in A_3$:

$$\nu^{a*}\in(\lambda_{13}p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_3'(\lambda_{13}p_1^*)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_{13}^2}D_1'(p_1^*)+\left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}}\right)^2D_2'(\lambda_{12}p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_3^*$, (3.16)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\geq p_3^*$. (3.17)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим условие баланса для каждого рынка с учетом перетоков товара:

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+q_{12}+q_{13}, \quad (3.18)$$

$$\sum_{A_2}\nu^a=D_2(p_2)-\lambda_{12}^{-1}q_{12}, \quad (3.19)$$

$$\sum_{A_3}\nu^a=D_3(p_3)-\lambda_{13}^{-1}q_{13}. \quad (3.20)$$

Из (3.19) следует, что $q_{12}=\lambda_{12}(D_2(p_2)-\sum_{A_2}\nu^a)$, из (3.20) - $q_{13}=\lambda_{13}(D_3(p_3)-\sum_{A_3}\nu^a)$. Подставив эти выражения в (3.18), получим равенство:

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(p_2)-\sum_{A_2}\nu^a)+$$
$$+\lambda_{13}(D_3(p_3)-\sum_{A_3}\nu^a).$$

Учитывая соотношения цен на рынках, перепишем его в виде:

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-$$
$$-\sum_{A_2}\nu^a)+\lambda_{13}(D_3(\lambda_{13}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a). \quad (3.21)$$

Таким образом, для производителей на первом рынке спрос равен:

$$D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a)+$$
$$+\lambda_{13}(D_3(\lambda_{13}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a).$$

Отсюда получим условия первого порядка для $a\in A_1$ вида (3.12-3.13).

Аналогично, для производителей на втором рынке спрос составляет:

$$D_2(\lambda_{12}p_1)+\frac{1}{\lambda_{12}}(D_1(p_1)-\sum_{A_1}\nu^a+$$
$$+\lambda_{13}(D_3(\lambda_{13}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a)),$$

и условия первого порядка для $a\in A_2$ принимают вид (3.14-3.15).

Спрос для производителей на третьем рынке равен:

$$D_3(\lambda_{13}p_1)+\frac{1}{\lambda_{13}}(D_1(p_1)-\sum_{A_1}\nu^a+$$
$$+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a)),$$

откуда для $a \in A_3$ следуют условия первого порядка (3.16-3.17). □

Обозначим $S^{1a}_{C12,13}(p)$ отображение, определяемое из (3.12-3.13); аналогично, $S^{2a}_{C12,13}(p)$ - отображение, определяемое из (3.14-3.15); $S^{3a}_{C12,13}(p)$ - отображение, определяемое из (3.16-3.17); $S^{i}_{C12,13}(p) = \sum_{A_i} S^{ia}_{C12,13}(p), \quad i = 1,2,3$. С учетом условий первого порядка из (3.21) следует, что равновесная цена p_1^* рассчитывается из условия

$$S^{1}_{C12,13}(p_1^*) + \lambda_{12} S^{2}_{C12,13}(\lambda_{12} p_1^*) + \lambda_{13} S^{3}_{C12,13}(\lambda_{13} p_1^*) =$$
$$= D_1(p_1^*) + \lambda_{12} D_2(\lambda_{12} p_1^*) + \lambda_{13} D_3(\lambda_{13} p_1^*)$$

Перейдем к рассмотрению равновесий типа 4, при которых в один узел идет переток из двух других при неактивных ограничениях пропускной способности. На рисунке 1в изображена конфигурация, отвечающая этому случаю с точностью до перенумерации узлов. Без ограничения общности будем считать, что товар передается во второй узел из первого и третьего. В равновесии типа 4

$$q_{12} \in (0, Q_{12}),\ q_{32} \in (0, Q_{32}),\ q_{13} = q_{31} = 0,$$
$$\lambda_{12} p_1^* = p_2^*,\ \lambda_{32} p_3^* = p_2^*,\ \lambda_{31}^{-1} < \frac{p_3^*}{p_1^*} < \lambda_{13}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для равновесия типа 4 условия первого порядка для $a \in A_1$ принимают вид:

$$v^{a*} \in (p_1^* - C^{a'}(v^{a*})) \mid D_1'(p_1^*) +$$
$$+ \lambda_{12}^2 D_2'(\lambda_{12} p_1^*) + \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}}\right)^2 D_3'(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1^*) \mid,$$

если $C^{a'}(0) < p_1^*$, (3.22)

$v^{a*} = 0$ при $C^{a'}(0) \ge p_1^*$; (3.23)

для производителей $a \in A_2$:

$$v^{a*} \in (\lambda_{12} p_1^* - C^{a'}(v^{a*})) \mid D_2'(\lambda_{12} p_1^*) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{12}^2} D_1'(p_1^*) + \left(\frac{1}{\lambda_{32}}\right)^2 D_3'(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1^*) \mid,$$

если $C^{a'}(0) < p_2^*$, (3.24)

$v^{a*} = 0$ при $C^{a'}(0) \ge p_2^*$. (3.25)

для производителей $a \in A_3$:

$$v^{a*} \in (\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1^* - C^{a'}(v^{a*})) \mid D_3'(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1^*) +$$
$$+ \lambda_{32}^2 D_2'(\lambda_{12} p_1^*) + \left(\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{12}}\right)^2 D_1'(p_1^*) \mid,$$

если $C^{a'}(0) < p_3^*$, (3.26)

$v^{a*} = 0$ при $C^{a'}(0) \ge p_3^*$. (3.27)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Запишем условие баланса для каждого рынка:

$$\sum_{A_1} v^a = D_1(p_1) + q_{12}, \tag{3.28}$$

$$\sum_{A_2} v^a = D_2(p_2) - \lambda_{12}^{-1} q_{12} - \lambda_{32}^{-1} q_{32}, \tag{3.29}$$

$$\sum_{A_3} v^a = D_3(p_3) + q_{32}. \tag{3.30}$$

Из (3.28) следует, что $q_{12} = \sum_{A_1} v^a - D_1(p_1)$,

из (3.30) - $q_{32} = \sum_{A_3} v^a - D_3(p_3)$.

Тогда из (3.29) получим

$$\sum_{A_1} v^a = D_1(p_1) + \lambda_{12}(D_2(p_2) -$$
$$- \sum_{A_2} v^a + \frac{1}{\lambda_{32}}(D_3(p_3) - \sum_{A_3} v^a)).$$

Учитывая соотношения цен на рынках, перепишем это равенство в виде

$$\sum_{A_1} v^a = D_1(p_1) + \lambda_{12}(D_2(\lambda_{12} p_1) -$$
$$- \sum_{A_2} v^a + \frac{1}{\lambda_{32}}(D_3(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1) - \sum_{A_3} v^a)). \tag{3.31}$$

Итак, для производителей на первом рынке спрос равен

$$D_1(p_1) + \lambda_{12}(D_2(\lambda_{12} p_1) - \sum_{A_2} v^a +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{32}}(D_3(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1) - \sum_{A_3} v^a)).$$

Отсюда получим условия первого порядка для $a \in A_1$ вида (3.2.22-3.2.23).

Аналогично, для производителей на втором рынке спрос составляет:

$$D_2(\lambda_{12} p_1) + \frac{1}{\lambda_{12}}(D_1(p_1) - \sum_{A_1} v^a) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{32}}(D_3(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1) - \sum_{A_3} v^a).$$

Условия первого порядка для $a \in A_3$ записываются как (3.24-3.25).

Спрос для производителей на третьем рынке составляет

$$D_3(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}} p_1) + \lambda_{32}(D_2(\lambda_{12} p_1) - \sum_{A_2} v^a +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{12}}(D_1(p_1) - \sum_{A_1} v^a)),$$

и условия первого порядка для $a \in A_3$ принимают вид (3.26-3.27). □

Обозначим $S^{1a}_{C12,32}(p)$ отображение, определяемое из (3.22-3.23); аналогично, $S^{2a}_{C12,32}(p)$ - отображение, определяемое из (3.24-3.25); $S^{3a}_{C12,32}(p)$ - отображение, определяемое из (3.26-3.27); $S^{i}_{C12,32}(p)=\sum_{A_i} S^{ia}_{C12,32}(p)$, $i = 1,2,3$. С учетом условий первого порядка, из (3.31) следует, что равновесная цена p_1^* рассчитывается из условия

$$S^1_{C12,32}(p_1^*)+\lambda_{12}S^2_{C12,32}(\lambda_{12}p_1^*)+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}}S^3_{C12,32}(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}}p_1^*)=$$
$$=D_1(p_1^*)+\lambda_{12}D_2(\lambda_{12}p_1^*)+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}}D_3(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{32}}p_1^*).$$

Далее проведем анализ равновесий типа 5, конфигурация для которого (с точностью до перенумерации узлов) показана на рисунке 1г. Будем считать, что товар передается из первого узла во второй и из второго узла в третий. В равновесии типа 5

$$q_{12}\in(0,Q_{12}),\ q_{23}\in(0,Q_{23}),\ q_{13}=q_{31}=0,$$
$$\lambda_{12}p_1^*=p_2^*,\ \lambda_{23}p_2^*=p_3^*,\ \lambda_{31}^{-1}<\frac{p_3^*}{p_1^*}<\lambda_{13}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.

Для равновесия типа 5 условия первого порядка для $a\in A_1$ принимают вид:

$$\nu^{a*}\in(p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_1'(p_1^*)+$$
$$+\lambda_{12}^2D_2'(\lambda_{12}p_1^*)+(\lambda_{12}\lambda_{23})^2D_3'(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_1^*$, (3.32)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\ge p_1^*$; (3.33)

для производителей $a\in A_2$:

$$\nu^{a*}\in(\lambda_{12}p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_2'(\lambda_{12}p_1^*)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_{12}^2}D_1'(p_1^*)+(\lambda_{23})^2D_3'(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_2^*$, (3.34)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\ge p_2^*$; (3.35)

для производителей $a\in A_3$:

$$\nu^{a*}\in(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1^*-C^{a'}(\nu^{a*}))\,|\,D_3'(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1^*)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_{23}^2}D_2'(\lambda_{12}p_1^*)+\left(\frac{1}{\lambda_{12}\lambda_{23}}\right)^2D_1'(p_1^*)\,|,$$

если $C^{a'}(0)<p_3^*$, (3.36)

$\nu^{a*}=0$ при $C^{a'}(0)\ge p_3^*$. (3.37)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем условие баланса для каждого рынка:

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+q_{12}, \tag{3.38}$$

$$\sum_{A_2}\nu^a=D_2(p_2)-\lambda_{12}^{-1}q_{12}+q_{23}, \tag{3.39}$$

$$\sum_{A_3}\nu^a=D_3(p_3)-\lambda_{23}^{-1}q_{23}. \tag{3.40}$$

Из (3.38) следует, что $q_{12}=\sum_{A_1}\nu^a-D_1(p_1)$, из (3.40) - $q_{23}=\lambda_{23}(D_3(p_3)-\sum_{A_3}\nu^a)$.

Подставим эти выражения в (3.39) и выразим

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(p_2)-\sum_{A_2}\nu^a+$$
$$+\lambda_{23}(D_3(p_3)-\sum_{A_3}\nu^a)).$$

Учитывая соотношения цен на рынках, перепишем его в виде:

$$\sum_{A_1}\nu^a=D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a+$$
$$+\lambda_{23}(D_3(\lambda_{23}\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a)). \tag{3.41}$$

Таким образом, для производителей на первом рынке спрос равен

$$D_1(p_1)+\lambda_{12}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a+$$
$$+\lambda_{23}(D_3(\lambda_{23}\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a)).$$

Зная функцию спроса, получим условия первого порядка для $a\in A_1$ вида (3.32-3.33).

Аналогично, для производителей на втором рынке спрос составляет:

$$D_2(\lambda_{12}p_1)+\frac{1}{\lambda_{12}}(D_1(p_1)-\sum_{A_1}\nu^a)+$$
$$+\lambda_{23}(D_3(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1)-\sum_{A_3}\nu^a),$$

и условия первого порядка для $a\in A_2$ принимают вид (3.34-3.35).

Спрос для производителей на третьем рынке:

$$D_3(\lambda_{12}\lambda_{23}p_1)+\frac{1}{\lambda_{23}}(D_2(\lambda_{12}p_1)-\sum_{A_2}\nu^a+$$
$$+\frac{1}{\lambda_{12}}(D_1(p_1)-\sum_{A_1}\nu^a)).$$

Условия первого порядка для $a\in A_3$ записываются как (3.36 - 3.37).□

Обозначим $S^{1a}_{C12,23}(p)$ - отображение, определяемое из условий (3.32-3.33); аналогично, $S^{2a}_{C12,23}(p)$ - отображение, определяемое согласно (3.34-3.35); $S^{3a}_{C12,23}(p)$ - отображение, определяемое согласно (3.36-3.37); $S^{i}_{C12,23}(p)=\sum_{A_i}S^{ia}_{C12,23}(p)$, $i = 1,2,3.$

С учетом условий первого порядка из (3.41) следует, что равновесная цена $p^*{}_1$ рассчитывается из условия

$$S^1_{C12,23}(p_1^*) + \lambda_{12} S^2_{C12,23}(\lambda_{12} p_1^*) + \lambda_{12}\lambda_{23} S^3_{C12,23}(\lambda_{12}\lambda_{23} p_1^*) =$$
$$= D_1(p_1^*) + \lambda_{12} D_2(\lambda_{12} p_1^*) + \lambda_{12}\lambda_{23} D_3(\lambda_{12}\lambda_{23} p_1^*).$$

IV. Заключение

Проведен теоретико-игровой анализ равновесий для сетевого рынка с тремя узлами. Учтены потери при передаче товара с одного рынка на другой. Рассмотрены все типы равновесий без активных ограничений пропускной способности, установлены алгоритмы функционирования рынка.

В результате исследования различных конфигураций с точки зрения возможных потоков получены условия первого порядка для различных типов равновесий Нэша.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю, профессору Васину А.А., за постановку задачи и внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1]. Vasin, A., Vasina, P. "Electricity Markets Analysis and Design" // Working Paper #2006/053. – Moscow, New Economic School 2006 – C.3-17.

[2]. Vasin, A., Sosina, Y., Weber,G. "Evaluation of Market power in Local and Two-Node Markets" – Тезисы доклада на Международном семинаре "Networking Gamesand Management". – Петрозаводск – 2012 – C.3-17.

[3]. Васин А. А. "Некооперативные игры в природе и обществе". – М.:МАКС пресс – 2005 – С.45-57.

[4]. Amir, R. "Cournot Oligopoly and the Theory of Super modular Games". – Games and Economic Behavior. – 1996 – 15 – P.132-148.

[5]. Kukushkin, N. "A Fixed Point Theorem for Decreasing Mappings". – Economic Letters –1994 – 46 – P. 23-46.

[6]. Amir, R. and Lambson, M. "On the Effects of Entry in Cournot Markets ". – Review of Economic Studies –2000 – 67 – P.235-254.

[7]. Novshek, W. "On the existence of Cournot Equilibrium ". – Review of Economic Studies –1985 –52 – P.85-98.

Game-theoretic analysis of market equilibria for a network with three nodes

Nogay Eleonora Adolfovna

***Abstract* - The paper conducted an analysis of possible Nash equilibria in Cournot competition model for the network market with three nodes without active bandwidth limitations. For each type received the first order conditions, allowing to calculate the corresponding equilibrium.**

***Keywords:* Cournot model; local market; Nash equilibrium; Network auction; three-node network market.**