Об одном подходе к определению ориентации орбиты космического аппарата

И.А. Панкратов

Аннотация — **Работа посвящена математическому моделированию движения космического аппарата (КА) по эллиптической орбите. Вектор ускорения от тяги двигателя во всё время движения КА направлен перпендикулярно плоскости его орбиты. Модуль вектора ускорения при этом сохраняет постоянное значение. Движение КА описано с помощью линейного кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА, не имеющего особых точек. Приближённое решение этого уравнения найдено в виде линейной комбинации базисных функций. Рассмотрены случаи, когда базисными функциями являются полиномы или тригонометрические функции. Для нахождения кватернионных коэффициентов указанного разложения был применён метод взвешенных невязок. В качестве весовых функций были взяты дельта-функции Дирака. Результаты расчётов по аналитическим формулам, полученным в работе, были сопоставлены с результатами численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности. В работе приведены таблицы погрешности определения ориентации орбиты КА для случая, когда начальное положение орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Показано, что разложение искомого решения по полиномам даёт меньшую погрешность, чем разложение по тригонометрическим функциям. Установлено, что погрешность определения скалярной части искомого кватерниона меньше погрешности нахождения компонент его векторной части.**

Ключевые слова — **метод взвешенных невязок, кватернион, космический аппарат, орбита.**

I. Введение

В работе рассмотрена задача определения ориентации эллиптической орбиты КА относительно инерциальной системы координат, начало которой находится в центре масс Земли, а оси направлены на удалённые звёзды. Во время движения КА по орбите на него действует ускорение от тяги реактивного двигателя. В статье рассмотрен актуальный частный случай задачи, когда ускорение направлено перпендикулярно плоскости его орбиты. При этом уравнения движения КА по орбите принимают более простой вид. Известно, что лишь величина составляющей вектора реактивного ускорения, ортогональной плоскости орбиты КА, влияет на изменение её ориентации в пространстве. На изменение формы и размеров орбиты КА влияют те составляющие вектора ускорения, которые лежат в плоскости его орбиты (в рассматриваемом частном случае эти компоненты вектора ускорения равны нулю). В астродинамике для описания ориентации орбиты КА обычно используются уравнения в угловых элементах орбиты (Ω_u – долгота восходящего узла, I – наклонение орбиты, ω_π – угловое расстояние перицентра от узла) [1, 2].

$$\frac{d\Omega_u}{d\varphi} = u\frac{r^3}{c^2}\sin(\omega_\pi + \varphi)\cdot \operatorname{cosec} \mathbf{I},$$
$$\frac{d\omega_\pi}{d\varphi} = -u\frac{r^3}{c^2}\sin(\omega_\pi + \varphi)\cdot \operatorname{ctg} \mathbf{I}, \tag{1}$$
$$\frac{dI}{d\varphi} = u\frac{r^3}{c^2}\cos(\omega_\pi + \varphi), \quad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Здесь φ – истинная аномалия (угол между радиус-вектором КА и радиус-вектором перицентра его орбиты), u – проекция вектора ускорения от тяги реактивного двигателя на направление вектора момента скорости КА; $c = \text{const}$ – модуль вектора момента скорости КА; r – модуль радиус-вектора центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты КА.

Уравнения (1) являются сильно нелинейными, содержат тригонометрические функции и вырождаются при $I = 0, \pi$. Это затрудняет их аналитическое исследование. В настоящей работе для описания движения центра масс КА использованы дифференциальные уравнения ориентации орбиты в параметрах Эйлера [3-5], которые являются линейными и не имеют особых точек. Указанное обстоятельство позволило предложить метод нахождения найти приближённого решения уравнений в параметрах Эйлера при условии, что на КА действует ускорение, постоянное по модулю.

II. Постановка задачи

Предположим, что КА движется по эллиптической орбите под действием реактивного ускорения, ортогонального плоскости его орбиты. Тогда кватернионные безразмерные уравнения, описывающие изменение ориентации орбиты КА относительно инерциальной системы координат, имеют вид

Статья получена 24 июня 2021 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

Илья Алексеевич Панкратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия (e-mail: PankratovIA@info.sgu.ru).

($u \in [-1;1]$, $0 < e < 1$) [6]:

$$2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{d\varphi} = \boldsymbol{\Lambda} \circ uNr^3(\boldsymbol{i}_1\cos\varphi + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi),$$
$$r = \frac{1}{1+e\cos\varphi}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda + \Lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \Lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \Lambda_3\boldsymbol{i}_3$ – нормированный кватернион ориентации орбиты КА; $\boldsymbol{i}_k$, $k = 1,2,3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; N – характерный параметр задачи (безразмерная комбинация максимального значения ускорения от тяги реактивного двигателя КА, большой полуоси орбиты КА и модуля момента скорости КА).

Аналитическое решение уравнений (2) известно лишь в частных случаях (см., например, работы [7-10]). Пусть величина ускорения от тяги реактивного двигателя сохраняет постоянное значение во всё время движения КА (т.е. $u \cdot N = N^b = \text{const}$). Именно такой вид имеет оптимальное по Понтрягину [11] управление при решении задачи быстродействия [12].

Определим закон изменения ориентации орбиты КА при $\varphi \in [0;\varphi^*]$, зная её начальное положение

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ рад} \quad \boldsymbol{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}}. \quad (3)$$

III. Метод взвешенных невязок

Для того чтобы найти приближённое решение уравнений (2) с начальным условием (3), применим метод взвешенных невязок. Пусть искомое решение имеет вид

$$\boldsymbol{\Lambda} \approx \hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}} + \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{a}_k N_k(\varphi). \quad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{a}_k$ – неизвестные коэффициенты (кватернионы), а $N_k(\varphi)$ – базисные функции (они должны быть линейно независимы на отрезке $[0;\varphi^*]$).

Помимо линейной независимости базисных функций, каждая из них должна равняться нулю на левом краю отрезка интегрирования, т.е. ($k = \overline{1,M}$)

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ рад} \quad N_k(0) = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что в этом случае

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(0) = \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}} + \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{a}_k N_k(0) = \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}}.$$

Таким образом, при выполнении условия (5), разложение (4) удовлетворяет начальному условию (3) при любых конечных $\boldsymbol{a}_k$.

Приближённое значение производной от искомой функции есть

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{d\varphi} \approx \frac{d\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{a}_k\frac{dN_k}{d\varphi}. \quad (6)$$

Подставим (4) с учётом (6) в уравнение (2), получим невязку вида

$$R^{\Lambda}_{[0;\varphi^*]} = \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{a}_k \circ \left[2\frac{dN_k}{d\varphi} - N_k N^b r^3(\boldsymbol{i}_1\cos\varphi + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi)\right] -$$
$$- N^b r^3 \boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}} \circ (\boldsymbol{i}_1\cos\varphi + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi).$$

Для того чтобы получить приближённое равенство $R^{\Lambda}_{[0;\varphi^*]} \approx \boldsymbol{0}$, можно применить различные методы взвешенных невязок [13, 14]. Проще всего использовать метод поточечной коллокации, при этом весовыми функциями будут дельта-функции Дирака $W_s(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi_s)$. Здесь $\varphi_s = s \cdot \varphi^* / M$ ($s = \overline{1,M}$) – точки коллокации. Тогда должны выполняться равенства ($s = \overline{1,M}$):

$$\int_0^{\varphi^*} R^{\Lambda}_{[0;\varphi^*]} \cdot W_s \, d\varphi = \int_0^{\varphi^*} R^{\Lambda}_{[0;\varphi^*]} \cdot \delta(\varphi - \varphi_s)\, d\varphi = \boldsymbol{0}.$$

Упростим последние равенства, применяя фильтрующее свойство дельта-функции [15], имеем:

$$R^{\Lambda}_{[0;\varphi^*]}\Big|_{\varphi=\varphi_s} = \boldsymbol{0}, \quad s = \overline{1,M}. \quad (7)$$

Полученные соотношения (7) – это система линейных алгебраических уравнений вида $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ с кватернионными коэффициентами относительно искомых коэффициентов $\boldsymbol{a}_k$ в разложении (4).

При этом коэффициенты матрицы жёсткости и столбца свободных членов имеют вид ($s, k = \overline{1,M}$)

$$\boldsymbol{K}_{s,k} = 2\frac{dN_k}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_s} - \frac{N_k(\varphi_s)N^b(\boldsymbol{i}_1\cos\varphi_s + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi_s)}{(1+e\cos\varphi_s)^3},$$

$$\boldsymbol{f}_s = \frac{N^b\boldsymbol{\Lambda}^{\text{н}}}{(1+e\cos\varphi_s)^3} \circ (\boldsymbol{i}_1\cos\varphi_s + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi_s).$$

IV. Примеры численного решения задачи

Рассмотрим кватернион погрешности определения ориентации орбиты КА

$$\boldsymbol{err}(e) = \arg\max_{\varphi\in[0;\pi/2]}\left|\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(\varphi,e) - \boldsymbol{\Lambda}^{\text{РК}}(\varphi,e)\right|.$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}(\varphi,e)$ – приближённое решение вида (4), где коэффициенты $\boldsymbol{a}_k$ найдены из системы уравнений (7); $\boldsymbol{\Lambda}^{\text{РК}}(\varphi,e)$ – результат численного решения задачи Коши (2), (3) методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности [16] с шагом 0.001 рад.

Пусть начальное положение орбиты КА, соответствующее ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС, задаётся следующими угловыми переменными:

$$\Omega_u^0 = \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ,$$
$$\omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0.0^\circ.$$

Параметры Эйлера Λ_j, $j = \overline{0,3}$ можно найти, зная угловые элементы орбиты, по формулам

$$\Lambda_0 = \cos\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2}\right),$$

$$\Lambda_1 = \sin\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2}\right),$$

$$\Lambda_2 = \sin\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2}\right),$$

$$\Lambda_3 = \cos\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2}\right).$$

Компоненты кватерниона ориентации орбиты КА, соответствующие указанным выше угловым переменным, равны

$$\Lambda_0^{н} = -0.255650, \quad \Lambda_1^{н} = -0.162241,$$

$$\Lambda_2^{н} = 0.510674, \quad \Lambda_3^{н} = 0.804694.$$

В табл. 1 показано, как меняется максимальное значение модуля кватерниона погрешности $\boldsymbol{err}(e)$ в случае, когда базисные функции являются полиномами.

Таблица 1

Модуль погрешности при $N_k(\varphi) = \varphi^k$

e	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$
0.0	$1.7\cdot10^{-2}$	$1.8\cdot10^{-3}$	$8.3\cdot10^{-4}$	$5.4\cdot10^{-4}$
0.1	$1.2\cdot10^{-2}$	$8.0\cdot10^{-4}$	$4.4\cdot10^{-4}$	$2.8\cdot10^{-4}$
0.2	$1.1\cdot10^{-2}$	$4.6\cdot10^{-4}$	$2.6\cdot10^{-4}$	$1.6\cdot10^{-4}$
0.3	$1.2\cdot10^{-2}$	$5.5\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-4}$	$9.7\cdot10^{-5}$
0.4	$1.3\cdot10^{-2}$	$8.5\cdot10^{-4}$	$8.8\cdot10^{-5}$	$6.2\cdot10^{-5}$
0.5	$1.5\cdot10^{-2}$	$1.3\cdot10^{-3}$	$6.0\cdot10^{-5}$	$4.0\cdot10^{-5}$

В табл. 2 показано, как меняется максимальное значение модуля кватерниона погрешности $\boldsymbol{err}(e)$ в случае тригонометрических базисных функций.

Таблица 2

Модуль погрешности при $N_k(\varphi) = \sin\left(\dfrac{\pi k\varphi}{2\varphi^*}\right)$

e	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$
0.0	$9.0\cdot10^{-3}$	$5.1\cdot10^{-3}$	$6.5\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-2}$
0.1	$7.0\cdot10^{-3}$	$3.4\cdot10^{-3}$	$4.7\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-2}$
0.2	$1.1\cdot10^{-2}$	$2.2\cdot10^{-3}$	$3.6\cdot10^{-3}$	$8.8\cdot10^{-3}$
0.3	$1.4\cdot10^{-2}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$2.7\cdot10^{-3}$	$6.8\cdot10^{-3}$
0.4	$1.7\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$2.1\cdot10^{-3}$	$5.4\cdot10^{-3}$
0.5	$1.9\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$4.4\cdot10^{-3}$

Из сравнения табл. 1 и 2 следует, что полиномы дают меньшую погрешность по сравнению с тригонометрическими базисными функциями.

На рис. 1, 2 показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности для случая $N_k(\varphi) = \varphi^k$ при $M = 8$.

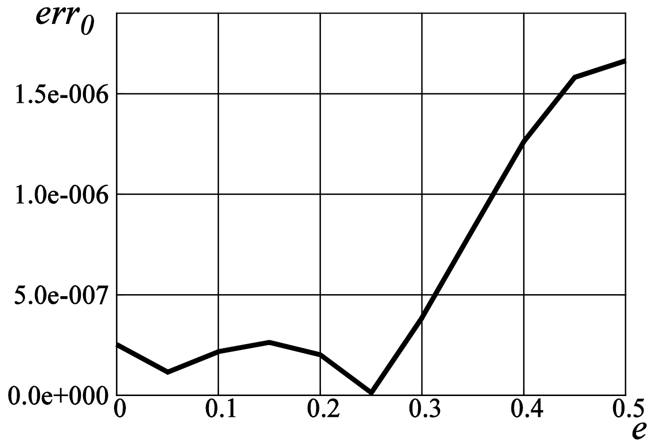

Рис. 1. Скалярная часть кватерниона погрешности

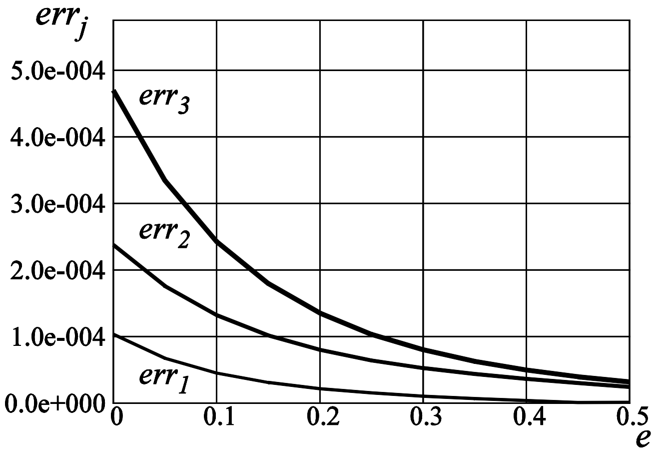

Рис. 2. Векторная часть кватерниона погрешности

Отметим, что максимальная погрешность определения скалярной части оказалась на два порядка меньше, чем при нахождении компонент векторной части.

V. Заключение

В работе предложен метод нахождения приближённого аналитического решения кватернионных уравнений ориентации орбиты КА. Результаты численного моделирования движения КА по орбите показали, что найденное решение обеспечивает приемлемую точность определения ориентации орбиты КА. Расчётные формулы, полученные в настоящей статье, позволяют приближённо определять ориентацию орбиты КА не только при малых значениях её эксцентриситета (как в работе [17]), но и при больших.

В дальнейшем предполагается расширить класс используемых базисных и весовых функций, чтобы повысить точность построенного решения. Также найденные аналитические выражения могут помочь найти неизвестные начальные приближения по сопряжённым переменным при решении краевых задач оптимального управления [6, 18].

Библиография

[1] Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. М.: Наука, 1976. 864 с.

[2] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука, 1968. 799 с.

[3] Челноков Ю.Н. *Применение кватернионов в теории орбитального движения спутника. I* // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759-770.

[4] Челноков Ю.Н. *Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I* // Космические исследования. 2001. Т. 39. Вып. 5. С. 502-517.

[5] Челноков Ю.Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения*. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

[6] Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. *Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 3. С. 87-95.

[7] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. М.: Наука, 1973. 320 с.

[8] Зубов В.И. *Аналитическая динамика гироскопических систем*. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.

[9] Молоденков А.В. К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3-13.

[10] Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. *Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 1. С. 84-89.

[11] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1983. 393 с.

[12] Челноков Ю.Н. *Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты* // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 895-912.

[13] Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация*. М.: Мир, 1986. 318 с.

[14] Коннор Дж., Бреббиа К. *Метод конечных элементов в механике жидкости*. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.

[15] Дирак П.А.М. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979. 408 с.

[16] Моисеев Н.Н. *Численные методы в теории оптимальных систем*. М.: Наука, 1971. 424 с.

[17] Панкратов И.А. *Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. Вып. 1. С. 97-105.

[18] Челноков Ю.Н., Панкратов И.А. *Переориентация орбиты космического аппарата, оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества* // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 74-78.

Илья Алексеевич Панкратов
доцент Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского,
научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН,
e-mail: PankratovIA@info.sgu.ru,
e-library.ru: authorid=608692.

On an approach to determining the orientation of the spacecraft orbit

Ilia A. Pankratov

***Abstract* — The paper is dedicated to a mathematical simulation of the motion of a spacecraft in an elliptical orbit. The acceleration vector is limited in modulo and orthogonal to the plane of spacecraft orbit during its motion. The spacecraft motion is described using a linear quaternion differential equation of the spacecraft orbit orientation. This equation has no singular points. Its approximate solution was found as a linear combination of basis functions. The cases are considered when the basis functions are polynomials or trigonometric functions. Unknown quaternion coefficients of this decomposition are found using the method of mean weighted residuals. The weight functions are Dirac delta functions. The analytical calculations are compared with the numerical solution of the Cauchy problem by the Runge-Kutta method of the 4th order of accuracy. Tables of the error in determining the orientation of the spacecraft orbit are given for the case when the initial position of the spacecraft orbit corresponds to the orientation of the orbit of one of the satellites of the GLONASS orbital grouping. It is shown that the decomposition of the desired solution by polynomials gives a smaller error than by trigonometric functions. We can determine the scalar part of desired quaternion with the smaller error than its vector part.**

***Keywords* — method of mean weighted residuals, quaternion, spacecraft, orbit.**

REFERENCES

[1] V. K. Abalakin, E. P. Aksenov, E. A. Grebennikov, V. G. Demin, Iu. A. Riabov, *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike (Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics)*. Moscow: Nauka, 1976, 864 p (in Russian).

[2] G. N. Duboshin, *Nebesnaia mekhanika. Osnovnye zadachi i metody (Celestial mechanics. Main tasks and methods)*. Moscow: Nauka, 1968, 799 p. (in Russian).

[3] Yu. N. Chelnokov, “Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I”, *Cosmic Research*, vol. 30, no. 6, pp. 612-621, 1992.

[4] Yu. N. Chelnokov, “The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: I”, *Cosmic Research*, vol. 39, no. 5, pp. 470-484, 2001.

[5] Yu. N. Chelnokov, *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniia (Quaternion and biquaternion models and methods of mechanics of solids and their applications)*. Moscow: Fizmatlit, 2006. 512 p (in Russian).

[6] I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov, “About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation”, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 12, no. 3, pp. 87-95, 2012 (in Russian).

[7] V. N. Branets, I. P. Shmyglevskii, *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela (Use of quaternions in the problems of orientation of solid bodies)*. Moscow: Nauka, 1973, 320 p (in Russian).

[8] V. I. Zubov, *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskih sistem (Analytical dynamics of gyroscopic systems)*. Leningrad: Sudostroenie, 1970. 317 p (in Russian).

[9] A. V. Molodenkov, “On the solution of the Darboux problem”, *Mechanics of Solids*, vol. 42, no. 2, pp. 167-176, 2007.

[10] I. A. Pankratov, Yu. N. Chelnokov, “Analytical solution of differential equations of circular spacecraft's orbit orientation”, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 11, no. 1, pp. 84-89, 2011 (in Russian).

[11] L. S. Pontriagin, V. G. Boltianskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov (The mathematical theory of optimal processes)*. Moscow: Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).

[12] Yu. N. Chelnokov, “Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 76, no. 6, pp. 646-657, 2012.

[13] O. Zienkiewicz, K. Morgan, *Finite elements and approximation*, New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley and Sons, 1983, 328 p.

[14] J. J. Connor, C. A. Brebbia, *Finite element techniques for fluid flow*, London-Boston: Newnes-Butterworths, 1977, 310 p.

[15] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1967, 324 p.

[16] N. N. Moiseev, *Chislennye metody v teorii optimal'nykh sistem (Numerical methods in the theory of optimal systems)*. Moscow: Nauka, 1971, 424 p (in Russian).

[17] I. A. Pankratov, “Analytical solution of equations of near-circular spacecraft's orbit orientation”, *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 15, no. 1, pp. 97-105, 2015 (in Russian).

[18] Yu. N. Chelnokov, I. A. Pankratov, *“Pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata, optimal'naia v smysle minimuma integral'nogo kvadratichnogo funktsionala kachestva (The reorientation of spacecraft’s orbit, that is optimal in the sense of mekimizing the integral quadratic performance functional)”*, Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie, no 8. p. 74-78, 2010 (in Russian).

Ilia Alekseevich Pankratov,
Associate Professor of the Saratov State University,
Researcher of the Institute of Precision Mechanics
and Control Problems of the Russian Academy of Sciences,
e-mail: PankratovIA@info.sgu.ru,
e-library.ru: authorid=608692.