

# Моделирование динамики антропоморфных шагающих роботов в системах виртуального окружения

Е.В. Страшнов, Д.В. Омельченко

**Аннотация**—В статье рассматривается задача моделирования в масштабе реального времени динамики шагающих антропоморфных роботов в системах виртуального окружения. Для решения этой задачи предлагается подход, в котором движение системы шарнирно связанных тел, из которых состоит антропоморфный робот, описывается полным набором координат. В рамках этого подхода моделирование динамики антропоморфного робота осуществляется с помощью разработанного метода последовательных импульсов, предназначенного для обеспечения ограничений, накладываемых на координаты и скорости тел. С применением полуявной схемы Эйлера для интегрирования уравнений движения предлагаемое решение позволяет реализовать динамику шарнирно связанных тел, динамику электроприводов в сочленениях робота, а также контактное взаимодействие ступней робота с поверхностью. Апробация предлагаемых в статье методов и подходов была проведена в созданном в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН программном комплексе виртуального окружения и показала их адекватность и эффективность при взаимодействии модели робота с виртуальными объектами.

**Ключевые слова**—двуногий шагающий робот, система шарнирно связанных тел, метод последовательных импульсов, голономное ограничение, полуявная схема Эйлера, электропривод, система виртуального окружения.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Антропоморфный двуногий шагающий робот представляет собой механическое устройство, которое по своему строению подобно человеку (см [1], [2]). Такие роботы передвигаются посредством ходьбы, оставляя дискретный след на поверхности перемещения. В настоящее время развитие исследований антропоморфных роботов связано с необходимостью выполнения работ в экстремальных условиях, когда участие человека невозможно или нежелательно [3]. Примерами таких работ является ликвидация последствий техногенных аварий и катастроф, тушение пожара, внекорабельная деятельность в космосе, строительство космической базы на Луне и т.п. Также возникают задачи, когда требуется выполнять

работы в зданиях или помещениях, предназначенных для людей. Антропоморфные роботы в отличие от других мобильных роботов (колесных и гусеничных) способны перемещаться внутри помещения, подниматься по лестнице, перешагивать препятствия, открывать двери и т.д.

Актуальным и важным направлением исследований является применение систем виртуального окружения для апробации разрабатываемых алгоритмов управления шагающими роботами. Это связано с тем, что обучение операторов навыкам дистанционного управления роботами удобно проводить на виртуальной модели, что в дальнейшем позволит уменьшить риск поломки реального робота. Однако моделирование динамики антропоморфных роботов является сложной задачей. Это связано с тем, что требуется моделировать поведение многозвенного механизма, исполнительных устройств, датчиков и т.д. При этом все расчеты должны проводиться в масштабе реального времени. Поэтому создание быстрых и эффективных методов и алгоритмов моделирования динамики антропоморфных роботов в системах виртуального окружения является важной и актуальной задачей.

Антропоморфный робот образует систему шарнирно связанных тел, для моделирования динамики которой существуют два подхода. В первом подходе динамика робота описывается с помощью минимального набора обобщенных координат (см. [4], [5], [6], [7]), задающих относительное движение в шарнирах. При таком подходе получение и интегрирование уравнений движения системы тел является вычислительно затратной задачей. Кроме того, необходимо специальным образом обрабатывать сложные механизмы, имеющие структуру замкнутой кинематической цепи, а также контакт и трение взаимодействующих тел. В данной работе предлагается модификация второго подхода (см. [8], [9], [10], [11], [12]), в рамках которого используется полный набор абсолютных координат, а шарниры задаются с помощью голономных ограничений, накладываемых на координаты и скорости тел. Для моделирования динамики систем шарнирно связанных тел был разработан метод последовательных импульсов [12], вычисляемых таким образом, чтобы ограничения были выполнены. При этом для интегрирования уравнений движения системы тел задействована полуявная схема Эйлера [13], которая обеспечивает необходимую точность и устойчивость моделирования. Предлагаемый

Статья получена 1 октября 2020.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-07-00371.

Е.В. Страшнов, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (e-mail: strashnov\_evg@mail.ru).

Д.В. Омельченко, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (e-mail: denvikom@gmail.com).

подход, основанный на методе последовательных импульсов, является универсальным и позволяет в масштабе реального времени реализовать динамику антропоморфных шагающих роботов, электроприводов в его сочленениях, а также контакт и трение при взаимодействии ступней робота с поверхностью.

## II. ДИНАМИКА АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

В данной работе предлагается подход, в котором антропоморфный робот представляется в виде системы из  $N$  шарнирно соединенных звеньев, динамика которой описывается для каждого твердого тела по отдельности, а действие шарниров ограничивается набором голоном-

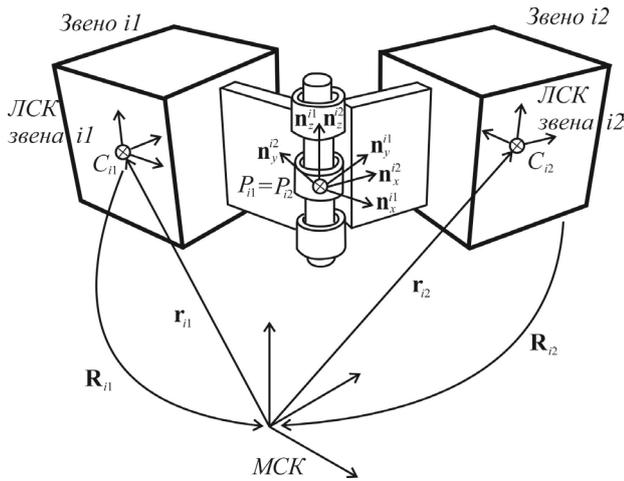


Рис. 1. Шарнирное соединение двух звеньев робота

ных связей, накладываемых на координаты и скорости звеньев.

Рассмотрим два звена  $i1$  и  $i2$  антропоморфного робота, соединенные шарниром (см. рис. 1). Пусть положения звеньев задаются в МСК (мировой системе координат) с помощью радиус-векторов  $\mathbf{r}_{i1}$  и  $\mathbf{r}_{i2}$ , а их ориентация – посредством матриц перехода  $\mathbf{R}_{i1}$  и  $\mathbf{R}_{i2}$  из ЛСК (локальных систем координат) звеньев в МСК. Тогда голономные связи в шарнире выражаются в виде

$$G_k(\mathbf{r}_{i1}, \mathbf{R}_{i1}, \mathbf{r}_{i2}, \mathbf{R}_{i2}) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (1)$$

где  $G_k$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции,  $M$  – число степеней свободы, которые ограничивает шарнир.

Дифференцируя (1) по времени  $t$ , получим ограничения относительно скоростей звеньев антропоморфного робота:

$$\dot{G}_k = \mathbf{J}_{k,i1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i1} \end{bmatrix} + \mathbf{J}_{k,i2} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i2} \\ \boldsymbol{\omega}_{i2} \end{bmatrix} = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{J}_{k,i1} = [\mathbf{J}_{k,i1,1} \quad \mathbf{J}_{k,i1,2}]$  и  $\mathbf{J}_{k,i2} = [\mathbf{J}_{k,i2,1} \quad \mathbf{J}_{k,i2,2}]$  – матрицы Якоби размерности 1 на 6,  $\mathbf{v}_{i1}$  и  $\mathbf{v}_{i2}$  – линейные скорости звеньев,  $\boldsymbol{\omega}_{i1}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{i2}$  – угловые скорости звеньев.

Покажем, как задаются ограничения (1) и (2) на примере осевого шарнира. Для описания относительного движения в шарнире рассмотрим две системы координат (см. рис. 1). Первая система координат

жестко связана с первым звеном, имеет начало в точке  $P_{i1}$  и оси с единичными векторами  $\{\mathbf{n}_x^{i1}, \mathbf{n}_y^{i1}, \mathbf{n}_z^{i1}\}$ . Аналогичным образом определяется вторая система координат с началом  $P_{i2}$  и осями  $\{\mathbf{n}_x^{i2}, \mathbf{n}_y^{i2}, \mathbf{n}_z^{i2}\}$ . Вращение в шарнире осуществляется вокруг оси  $\mathbf{n}_z^{i1}$ . При правильной работе осевого шарнира начала двух систем координат будут совпадать (т.е.  $P_{i1} = P_{i2}$ ), а орты  $\mathbf{n}_x^{i1}$  и  $\mathbf{n}_y^{i1}$  будут перпендикулярны  $\mathbf{n}_z^{i2}$ . Тогда ограничения (1) можно записать в виде

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{r}_{P_{i1}} - \mathbf{r}_{P_{i2}} = \mathbf{r}_{i1} + \mathbf{R}_{i1} \cdot \mathbf{C}_{i1} \mathbf{P}_{i1} - \mathbf{r}_{i2} - \mathbf{R}_{i2} \cdot \mathbf{C}_{i2} \mathbf{P}_{i2} = \mathbf{0};$$

$$G_2 = \mathbf{n}_x^{i1}(\mathbf{R}_{i1}) \cdot \mathbf{n}_z^{i2}(\mathbf{R}_{i2}) = 0;$$

$$G_3 = \mathbf{n}_y^{i1}(\mathbf{R}_{i1}) \cdot \mathbf{n}_z^{i2}(\mathbf{R}_{i2}) = 0,$$

где  $\dim(\mathbf{G}_1) = 3$ , точки  $\mathbf{C}_{i1}$  и  $\mathbf{C}_{i2}$  – центры масс звеньев.

После дифференцирования по  $t$  получим ограничения относительно скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}}_1 &= \mathbf{v}_{i1} + \boldsymbol{\omega}_{i1} \times \mathbf{C}_{i1} \mathbf{P}_{i1} - \mathbf{v}_{i2} - \boldsymbol{\omega}_{i2} \times \mathbf{C}_{i2} \mathbf{P}_{i2} = \\ &= [\mathbf{E}_3 \quad -(\mathbf{C}_{i1} \mathbf{P}_{i1})^\times] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i1} \end{bmatrix} + [-\mathbf{E}_3 \quad (\mathbf{C}_{i2} \mathbf{P}_{i2})^\times] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i2} \\ \boldsymbol{\omega}_{i2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}; \end{aligned}$$

$$\dot{G}_2 = (\boldsymbol{\omega}_{i1} - \boldsymbol{\omega}_{i2}) \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & \mathbf{u}_1^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -\mathbf{u}_1^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i2} \\ \boldsymbol{\omega}_{i2} \end{bmatrix} = 0;$$

$$\dot{G}_3 = (\boldsymbol{\omega}_{i1} - \boldsymbol{\omega}_{i2}) \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & \mathbf{u}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -\mathbf{u}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i2} \\ \boldsymbol{\omega}_{i2} \end{bmatrix} = 0,$$

где  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{n}_z^{i2} \times \mathbf{n}_x^{i1}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{n}_z^{i2} \times \mathbf{n}_y^{i1}$ ,  $\mathbf{E}_3$  – единичная матрица 3 на 3,  $(\mathbf{r})^\times$  – кососимметричная матрица векторного произведения  $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ . При дифференцировании мы использовали свойства векторного и смешанного произведения векторов, а также формулу Бура [14].

Аналогичным образом формируются ограничения для других типов шарниров.

Согласно принципу освобожденности от связей любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, заменив действия связей их реакциями. Тогда динамику твердого тела (звена антропоморфного робота) можно описать с помощью дифференциальных уравнений Ньютона-Эйлера [15]:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = m_i \mathbf{g} + \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^c; \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \frac{d(\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{dt} = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\tau}_i^e + \boldsymbol{\tau}_i^c, \quad (4)$$

где  $i = \overline{1, N}$ ,  $m_i$  – масса тела,  $\mathbf{I}_i$  – тензор инерции тела,  $\mathbf{L}_i = \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$  – момент импульса тела,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения,  $\mathbf{f}_i^e$  и  $\boldsymbol{\tau}_i^e$  – внешние силы и моменты,  $\mathbf{f}_i^c$  и  $\boldsymbol{\tau}_i^c$  – силы и моменты реакций связей.

Из классической механики известно [16], что силы и моменты реакций связей вычисляются через матрицы Якоби. Из выражения (2) для двух звеньев  $i1$  и  $i2$ , соединенных шарниром, силы и моменты  $k$ -го ограничения можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i1,k}^c \\ \boldsymbol{\tau}_{i1,k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k,i1,1}^\top \\ \mathbf{J}_{k,i1,2}^\top \end{bmatrix} \lambda_k, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i2,k}^c \\ \boldsymbol{\tau}_{i2,k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k,i2,1}^\top \\ \mathbf{J}_{k,i2,2}^\top \end{bmatrix} \lambda_k, \quad (5)$$

где  $\lambda_k$  – неизвестный множитель для  $k$ -го ограничения.

В свою очередь, кинематика твердого тела определяется с помощью соотношений [15]:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{R}}_i = (\boldsymbol{\omega}_i)^\times \mathbf{R}_i. \quad (6)$$

Вспользуемся полуявной схемой Эйлера [13] для интегрирования дифференциальных уравнений (3), (4), и (6). В этой схеме на очередном шаге моделирования сначала вычисляются скорости звеньев, а затем их координаты. При этом для обеспечения устойчивости в предлагаемой схеме угловая скорость вычисляется через момент импульса. С учетом всех ограничений для  $i$ -го звена и соотношений (5) получим следующие уравнения для момента времени  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + \Delta t \mathbf{m}_i^{-1} (\mathbf{g} + \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{m}_i^{-1} \sum_k \mathbf{J}_{k,i,1}^\top p_k; \quad (7)$$

$$\mathbf{L}_i(t + \Delta t) = \mathbf{L}_i(t) + \Delta t \boldsymbol{\tau}_i^e + \sum_k \mathbf{J}_{k,i,2}^\top p_k; \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{L}_i(t + \Delta t); \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \Delta t \mathbf{v}_i(t + \Delta t); \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_i(t + \Delta t) = \mathbf{R}_i(t) + \Delta t (\boldsymbol{\omega}_i(t + \Delta t))^\times \mathbf{R}_i(t), \quad (11)$$

где  $p_k = \lambda_k \Delta t$ .

Обеспечение ограничений (1) и (2) в рассматриваемой схеме интегрирования осуществляется путем вычисления соответствующих значений импульсов  $p_k$ . Для этого был разработан метод последовательных импульсов [12]. Его идея состоит в том, что вычисление импульсов  $p_k$  производится таким образом, чтобы ограничения (2) были выполнены в момент времени  $t + \Delta t$ . Подставим (7) и (9) в (2) с учетом (8). Тогда получим уравнение относительно импульса  $p_k$ :

$$\begin{aligned} & (m_{i1}^{-1} \mathbf{J}_{k,i,1,1} \mathbf{J}_{k,i,1,1}^\top + m_{i2}^{-1} \mathbf{J}_{k,i,2,1} \mathbf{J}_{k,i,2,1}^\top + \mathbf{J}_{k,i,2} \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{J}_{k,i,1,2}^\top + \\ & + \mathbf{J}_{k,i,2,2} \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{J}_{k,i,2,2}^\top) p_k = -\dot{\mathbf{G}}_k(t) - \Delta t (m_{i1}^{-1} \mathbf{J}_{k,i,1,1} (\mathbf{g} + \mathbf{f}_i^e) - \\ & - m_{i2}^{-1} \mathbf{J}_{k,i,2,1} (\mathbf{g} + \mathbf{f}_i^e) - \mathbf{J}_{k,i,1,2} \mathbf{I}_i^{-1} \boldsymbol{\tau}_i^e - \mathbf{J}_{k,i,2,2} \mathbf{I}_i^{-1} \boldsymbol{\tau}_i^e). \end{aligned} \quad (12)$$

Решая уравнения вида (12) для каждого ограничения, получим неизвестные значения  $p_k$ . Такой процесс является итерационным и продолжается до тех пор, пока не будет выполнен один из критериев окончания.

Соотношения (7)-(11) с вычислением импульсов  $p_k$  из уравнения (12) позволяют реализовать динамику шагающего антропоморфного робота. При этом отметим, что для обеспечения ограничений (1) был разработан метод раздельных импульсов, с подробностями реализации которого можно ознакомиться в работе [12].

### III. ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОПРИВОДА РОБОТА

В качестве исполнительных устройств робота часто используются электроприводы, установленные в его сочленениях. Дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока имеет вид [17]:

$$u = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + E, \quad (13)$$

где  $u$  – напряжение, приложенное к якору двигателя;  $i$  – ток, протекающий по обмоткам якоря;  $R$  – сопротивление обмоток якоря двигателя;  $L$  – индуктивность;  $E$  –

обратная ЭДС, возникающая в цепи якоря.

Обратная ЭДС пропорциональна угловой скорости вращения якоря двигателя:

$$E = K_t \omega_m, \quad (14)$$

где  $K_t$  – постоянная крутящего момента.

Крутящий момент двигателя  $\tau_m$  связан с током следующим образом:

$$\tau_m = K_t \cdot i. \quad (15)$$

Динамика электродвигателя описывается дифференциальным уравнением

$$I_m \dot{\omega}_m = \tau_m, \quad (16)$$

где  $I_m$  – момент инерции якоря двигателя.

Выведем уравнения математической модели электродвигателя относительно  $\tau_m$ . Для этого подставим (14) и (15) в (13), и умножим результат на  $K_t / R$ . После преобразований получим следующее дифференциальное уравнение:

$$T_e \frac{d\tau_m}{dt} + \tau_m = \frac{K_t}{R} (u - K_t \omega_m),$$

где  $T_e = L / R$  – реактивное сопротивление двигателя.

В терминах паспортных параметров электродвигателя полученное уравнение преобразуется к виду

$$T_e \frac{d\tau_m}{dt} + \tau_m = M_s \left( u - \frac{\omega_m}{\omega_{m, idle}} \right), \quad (17)$$

где  $M_s = K_t / R$  – пусковой момент двигателя,  $\omega_{m, idle} = 1 / K_t$  – скорость холостого хода двигателя.

Динамика электродвигателя антропоморфного робота описывается с помощью дифференциальных уравнений (16) и (17). Если  $T_e$  мало, то этим значением можно пренебречь и уравнение (17) примет вид

$$I_m \dot{\omega}_m = M_s \left( u - \frac{\omega_m}{\omega_{m, idle}} \right).$$

Для интегрирования (16) и (17) воспользуемся следующей схемой интегрирования:

$$T_e \frac{\tau_m(t + \Delta t) - \tau_m(t)}{\Delta t} + \tau_m(t) = M_s \left( u - \frac{\omega_m(t)}{\omega_{m, idle}} \right); \quad (18)$$

$$I_m \frac{\omega_m(t + \Delta t) - \omega_m(t)}{\Delta t} = \tau_m(t + \Delta t).$$

Движение в сочленении антропоморфного робота происходит через механическую передачу. Это приводит к тому, что угловая скорость нагрузки  $\omega_L$  связана с угловой скоростью двигателя  $\omega_m$  следующим образом

$$\omega_L = \frac{1}{r} \omega_m,$$

где  $r$  – коэффициент редукции.

Моделирование электропривода в системе виртуального окружения осуществляется с применением схемы интегрирования (18) и путем обеспечения ограничения, связывающего угол поворота двигателя с углом поворота в сочленении. С подробностями реализации такого подхода можно ознакомиться в работе [18].

IV. ДИНАМИКА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
 СТУПНЕЙ РОБОТА С ПОВЕРХНОСТЬЮ

При выполнении технологических операций и перемещении по поверхности антропоморфный робот взаимодействует с другими объектами. В системах виртуального окружения это приводит к необходимости решения задачи разрешения коллизий (пересечений) виртуальных объектов. Рассмотрим эту задачу на примере контактного взаимодействия ступней робота с поверхностью.

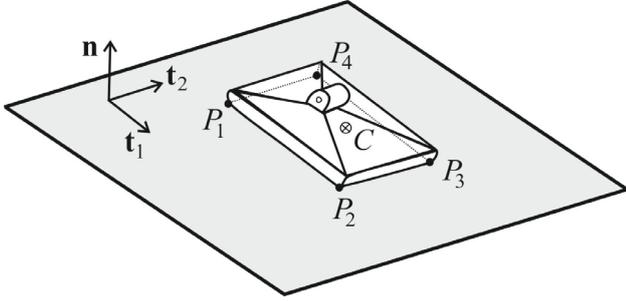


Рис. 2. Контакт ступни робота с поверхностью

На рис. 2 схематично изображен контакт ступни робота с горизонтальной поверхностью. Здесь, мы считаем, что нам известны точки контакта  $P_j$ ,  $j=1, \dots, 4$ , которые аппроксимируют опорную поверхность ступни робота. Вектор  $\mathbf{n}$  задает нормаль к поверхности, по которой движется робот. В зависимости от относительной скорости ступни вдоль нормали различают несколько типов контактного взаимодействия. Если выполнено неравенство  $\mathbf{v}_{P_j} \cdot \mathbf{n} < 0$ , то это соответствует случаю удара при взаимодействии ступни с поверхностью. При ударе происходит конечное изменение скорости твердого тела (ступни) за малый промежуток времени, что приводит к ограничению

$$\mathbf{v}_{P_j}^+ \cdot \mathbf{n} = -k_r \mathbf{v}_{P_j}^- \cdot \mathbf{n},$$

где  $k_r$  – коэффициент восстановления при ударе,  $\mathbf{v}_{P_j}^-$  – скорость тела в точке  $P_j$  до удара,  $\mathbf{v}_{P_j}^+$  – скорость тела в точке  $P_j$  после удара.

Так как удар произошел в некоторый момент времени  $t^* \in [t, t + \Delta t]$ , то это ограничение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}(t + \Delta t) + \boldsymbol{\omega}(t + \Delta t) \times \mathbf{CP}_j) \cdot \mathbf{n} = \\ & = -k_r (\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{CP}_j) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (19)$$

где точка  $C$  – центр масс ступни.

Ограничение вида (19) накладывается на линейную и угловую скорости ступни и обрабатывается аналогично (2) путем вычисления импульса из уравнения вида (12).

Если  $G_j = \mathbf{r}_{P_j} \cdot \mathbf{n} \leq 0$  и  $\mathbf{v}_{P_j} \cdot \mathbf{n} = 0$ , то это соответствует случаю контакта ступни робота с поверхностью. Тогда требуется обеспечить ограничения, которые формулируются в виде задачи LCP (Linear Complementarity Problem – задачи с линейными дополнениями) [15]:

$$\dot{G}_j(t + \Delta t) \geq 0, \quad p_{n,j} \geq 0, \quad \dot{G}_j(t + \Delta t)p_{n,j} = 0, \quad (20)$$

где  $\dot{G}_j(t + \Delta t) = \mathbf{v}_{P_j}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n}$ ,  $p_{n,j}$  – величина импульса силы реакции опоры.

Из (20) следует, что должно быть выполнено одно из условий:  $\dot{G}_j(t + \Delta t) = 0$  или  $p_{n,j} = 0$ . Поэтому для решения задачи (20) сначала ищем такое  $p'_{n,j} \geq 0$ , при котором будет выполнено  $\dot{G}_j(t + \Delta t) = 0$ . Применяя полуявную схему Эйлера для интегрирования уравнений движения ступни, получим уравнение

$$(m^{-1} + \mathbf{w}_{n,j}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{w}_{n,j}) p'_{n,j} = -\mathbf{v}_{P_j} \cdot \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{w}_{n,j} = \mathbf{CP}_j \times \mathbf{n}$ ,  $m$  – масса ступни робота,  $I$  – тензор инерции ступни робота.

Если при решении этого уравнения получим, что  $p'_{n,j} \geq 0$ , то ограничения (20) будут выполнены. В противном случае, если  $p'_{n,j} < 0$ , то в качестве решения (20) выбирается  $p_{n,j} = 0$ .

При контакте ступни робота с поверхностью возникает трение, которое бывает трёх видов: скольжения, качения и верчения. Рассмотрим моделирование трения скольжения методом последовательных импульсов. Пусть  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$  – два взаимно перпендикулярные единичные векторы, которые находятся в плоскости контакта. Согласно закону Кулона-Амонтона при моделировании трения скольжения должно быть выполнено неравенство

$$p_{t1,j}^2 + p_{t2,j}^2 \leq \mu^2 p_{n,j}^2, \quad (21)$$

где  $p_{t1,j}$  и  $p_{t2,j}$  – величины импульсов трения скольжения,  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

Для моделирования трения скольжения сначала вычислим импульсы  $p'_{t1,j}$  и  $p'_{t2,j}$ , при которых отсутствует движение в плоскости контакта, что соответствует условиям

$$\mathbf{v}_{P_j}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_{P_j}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{t}_2 = 0.$$

Обеспечение этих условий приводит к уравнениям

$$(m^{-1} + \mathbf{w}_{tk,j}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{w}_{tk,j}) p'_{tk,j} = -\mathbf{v}_{P_j} \cdot \mathbf{t}_k,$$

где  $\mathbf{w}_{tk,j} = \mathbf{CP}_j \times \mathbf{t}_k$ ,  $k=1, 2$ .

Если неравенство (21) нарушено для импульсов  $p'_{t1,j}$  и  $p'_{t2,j}$  (то есть,  $p_{t1,j}^2 + p_{t2,j}^2 > \mu^2 p_{n,j}^2$ ), то импульсы  $p_{t1,j}$  и  $p_{t2,j}$  корректируются следующим образом

$$p_{t1,j} = \frac{p'_{t1,j}}{\sqrt{p_{t1,j}^2 + p_{t2,j}^2}} \mu p_{n,j}, \quad p_{t2,j} = \frac{p'_{t2,j}}{\sqrt{p_{t1,j}^2 + p_{t2,j}^2}} \mu p_{n,j},$$

Здесь импульсы были выбраны таким образом, чтобы было выполнено равенство  $p_{t1,j}^2 + p_{t2,j}^2 = \mu^2 p_{n,j}^2$ .

Если для импульсов  $p'_{t1,j}$  и  $p'_{t2,j}$  неравенство (21) выполнено, то импульсы выбираются как  $p'_{t1,j} = p_{t1,j}$  и  $p'_{t2,j} = p_{t2,j}$ .

Моделирование трения качения и верчения ступни антропоморфного робота с поверхностью осуществляется аналогичным образом.

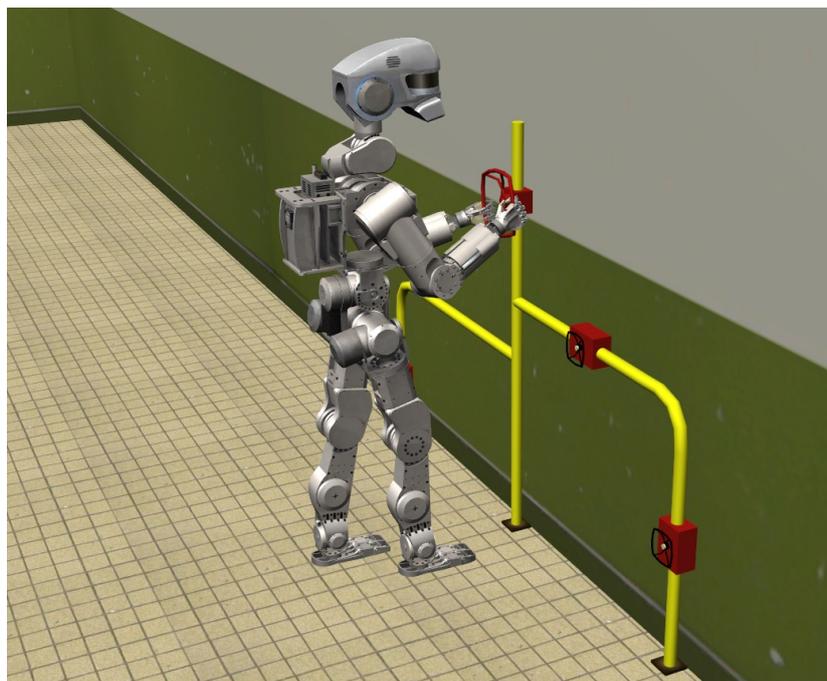


Рис. 3. Выполнение операции поворота крана с помощью двуногого шагающего робота

#### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Апробация предложенных в статье методов и подходов моделирования динамики антропоморфных шагающих была проведена в программном комплексе системы виртуального окружения, созданном в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Для этого была разработана виртуальная модель шагающего робота, которая соответствует реальному роботу Skybot F-850. Эта модель была создана с помощью разработанного в системе 3ds Max конструктора из набора специальных объектов, посредством которых задаются массо-инерционные характеристики звеньев, параметры электроприводов, а также параметры материалов, из которых изготовлен робот. Апробация динамической устойчивости модели робота проводилась во время выполнения им задачи открытия и закрытия крана. В качестве виртуальной сцены была выбрана модель интерьера помещения, внутри которого робот может свободно перемещаться. На рис. 3 показано положение робота, при котором ноги робота находятся в контакте с ровной поверхностью (полом) в двухопорной фазе. Управление роботом реализовано в автоматическом режиме путем задания движений рук вдоль заданных траекторий с применением инверсной кинематики. При этом выполнение роботом операции поворота крана осуществляется с реализацией обратной связи по показаниям датчиков сил [19], установленных на кистях рук робота.

Результаты апробации показали адекватность и эффективность предложенных в статье решений. Разработанный метод последовательных импульсов позволяет в масштабе реального времени реализовать динамику шагающих антропоморфных роботов при выполнении задач, когда робот находится в состоянии

механического равновесия. Полученные результаты могут быть использованы в имитационно-тренажерных комплексах, виртуальных лабораториях, образовательных приложениях и т.д.

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] В.Е. Павловский, "О разработках шагающих машин," *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, № 101, 2013, 32 с.
- [2] J. Fink, "Anthropomorphism and human likeness in the design of robots and human-robot interaction," *International Conference on Social Robotics*, 2012, pp. 199-208.
- [3] Е.И. Юрьевич, *Основы робототехники: учеб. пособие*, 4-е изд., перераб. и доп. СПб: БХВ-Петербург, 2017, 304 с.
- [4] M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008.
- [5] R. Featherstone, *Rigid body dynamics algorithms*. New York: Springer-Verlag, 2008.
- [6] E. Kokkevis, "Practical physics for articulated characters," in *Game Developers Conference*, 2004.
- [7] M.V. Mikhaylyuk, E.V. Strashnov, and P.Yu. Timokhin, "Algorithms of multibody dynamics simulation using articulated-body method," *Mathematica Montisnigri*, Vol. XXXIX, 2017, pp. 133-145.
- [8] E. Catto, "Iterative dynamics with temporal coherence," in *Game Developers conference*, 2005, pp. 1-24.
- [9] R. Weinstein, J. Teran, and R. Fedkiw, "Dynamic simulation of articulated rigid bodies with contact and collision," in *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 12, 2006, pp.365-374.
- [10] J. Bender, K. Erleben, J. Trinkle, and E. Coumans, "Interactive simulation of rigid body dynamics in computer graphics," *Computer Graphics Forum*, Vol. 33, Wiley Online Library, 2014, pp. 246-270.
- [11] K. Pickl, "Rigid body dynamics: links and joints," Master's thesis, Computer Science Department 10 (System Simulation), University of Erlangen-Nurnberg, 2009.
- [12] М.В. Михайлюк, Е.В. Страшнов, "Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов," *Труды НИИСИ РАН*, Т. 4, № 2, 2014, стр. 52-60.
- [13] G. van den Bergen, and D. Gregorius, *Game physics pearls*. AK Peters/CRC Press, 2010.
- [14] В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др., *Курс теоретической механики: Учебник для вузов*, под ред. К.С. Колесникова, 3-е изд. стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, 736 с.

- [15] H. Garstenauer, and D.I.D.G. Kurka, *A unified framework for rigid body dynamics*. Degree Paper, 2006.
- [16] A.A. Shabana, *Computational dynamics*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
- [17] H. Asada, *Introduction to Robotics*. Lecture Notes, 2005.
- [18] Е.В. Страшнов, М.А. Торгашев, "Моделирование динамики электроприводов виртуальных роботов в имитационно-тренажерных комплексах," *Мехатроника, автоматизация, управление*, т. 17, № 11, стр. 762-768, 2016.
- [19] Е.В. Страшнов, М.В. Михайлюк, "Методы силового управления манипуляционными роботами в системах виртуального окружения," *International Journal of Open Information Technologies*, Т. 7, № 9, 2019, стр. 39-45.

# Simulation of anthropomorphic walking robot dynamics in virtual environment systems

E.V. Strashnov, D.V. Omelchenko

**Abstract**—This paper considers the task of real time dynamics simulation for anthropomorphic walking robots in virtual environment systems. To solve this task, an approach is proposed in which the motion of articulated rigid bodies system, representing an anthropomorphic robot, is described by absolute coordinates. In this approach, the dynamics simulation of the anthropomorphic robot is realized using the developed sequential impulses method, designed to ensure the constraints imposed on the body coordinates and velocities. Using the semi-implicit Euler scheme for integration of motion equations, the proposed solution allows one to realize the dynamics of articulated rigid bodies, the actuator dynamics in the robot joints, as well as the contact interaction of the robot's feet with the surface. Approbation of the methods and approaches proposed in this paper was carried out in the virtual environment software complex created at the SRISA RAS and showed their adequacy and effectiveness by the example of performing technological operations in which the robot interacts with objects.

**Keywords**—bipedal walking robot, articulated rigid bodies system, sequential impulses method, holonomic constraint, semi-implicit Euler scheme, actuator, virtual environment system.

## REFERENCES

- [1] V.E. Pavlovsky, "About the development of walking machines," *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, No. 101, 2013.
- [2] J. Fink, "Anthropomorphism and human likeness in the design of robots and human-robot interaction," *International Conference on Social Robotics*, 2012, pp. 199-208.
- [3] E.I. Yurievich, *Fundamentals of Robotics: Textbook*. manual, 4th ed., rev. and add. SPb: BHV-Petersburg, 2017.
- [4] M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008.
- [5] R. Featherstone, *Rigid body dynamics algorithms*. New York: Springer-Verlag, 2008.
- [6] E. Kokkevis, "Practical physics for articulated characters," in *Game Developers Conference*, 2004.
- [7] M.V. Mikhaylyuk, E.V. Strashnov, and P.Yu. Timokhin, "Algorithms of multibody dynamics simulation using articulated-body method," *Mathematica Montisnigri*, Vol. XXXIX, 2017, pp. 133-145.
- [8] E. Catto, "Iterative dynamics with temporal coherence," in *Game Developers conference*, 2005, pp. 1-24.
- [9] R. Weinstein, J. Teran, and R. Fedkiw, "Dynamic simulation of articulated rigid bodies with contact and collision," in *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 12, 2006, pp.365-374.
- [10] J. Bender, K. Erleben, J. Trinkle, and E. Coumans, "Interactive simulation of rigid body dynamics in computer graphics," *Computer Graphics Forum*, Vol. 33, Wiley Online Library, 2014, pp. 246-270.
- [11] K. Pickl, "Rigid body dynamics: links and joints," Master's thesis, Computer Science Department 10 (System Simulation), University of Erlangen-Nürnberg, 2009.
- [12] M.V. Mikhaylyuk, and E.V. Strashnov, "Simulation of articulated multibody system using sequential impulses method," *Proceedings of NIISI RAS*, Vol. 4, No. 2, 2014, pp. 52-60.
- [13] G. van den Bergen, and D. Gregorius, *Game physics pearls*. AK Peters/CRC Press, 2010.
- [14] V.I. Drong, V.V. Dubinin, M.M. Ilyin et al., *Course of Theoretical Mechanics: Textbook for Universities*, ed. K.S. Kolesnikov, 3rd ed. Moscow: Publishing house of BMSTU, 2005, 736 p.
- [15] H. Garstenaue, and D.I.D.G. Kurka, *A unified framework for rigid body dynamics*. Degree Paper, 2006.
- [16] A.A. Shabana, *Computational dynamics*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
- [17] H. Asada, *Introduction to Robotics*. Lecture Notes, 2005.
- [18] E.V. Strashnov, and M.A. Torgashev, "Simulation of actuator dynamics virtual robots in training complexes," *Mechatronics, automation, control*, Vol. 17, No. 11, pp. 762-768, 2016.
- [19] E.V. Strashnov, and M.V. Mikhaylyuk, "Methods for robotic manipulator force control in virtual environment systems," *International Journal of Open Information Technologies*, Vol. 7, No. 9, 2019, pp. 39-45.